ENRICHISSEMENT EN COGÈBRES

BRICE LE GRIGNOU

Table des matières

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Dès qu'on s'intéressera à des structures d'algèbres où apparaissent des permutations de variables (algèbres commutatives, algèbres de Lie), on supposera $char(\mathbb{K}) = 0$.

Définition 1. On notera Ch la catégorie des complexes de chaînes de $\mathbb{K}$-modules.

1. Le cas des cogèbres coassociatives

En partie d'après Sweedler et Anel-Joyal.

1.1. Définition d'une cogèbre.

Définition 2. Une cogèbre coassociative est la donnée d'un complexe de chaîne V muni d'un morphisme

$$w : V \to V \otimes V$$

appelé le coproduit qui vérifie une condition de coassociativité. De manière équivalente, en notant pour un complexe de chaînes W

$$W^{As} = \prod_{k \geq 1} W^{\otimes k}$$
$$W^{As \triangleleft As} = \prod_{l;k=k_1+\cdots+k_l} = W^{\otimes k}$$

alors une cogèbre coassociative est la donnée d'un complexe de chaines V muni d'un morphisme

$$V \to V^{As}$$

tel que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr] \arrow[d] & & V^{As} \arrow[d] \\
V^{As} \arrow[r] & (V^{As})^{As} \arrow[r] & V^{As \triangleleft As}.
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}"'] & V^{As} \arrow[r, "V^{u}"] & V.
\end{tikzcd}$$

Exemple 1. Pour quoi s'intéresser aux cogèbres ? Soit X un ensemble simplicial. Muni de la diagonale

$$X \to X \times X$$

c'est une cogèbre coassociative cocommutative dans la catégories monoidale cartésienne des ensembles simpliciaux. Les chaînes cX sur X héritent alors d'une structure de cogèbres coassociatives cocommutatives counitaires à homotopie près (E_∞-cogèbres). On retrouve ainsi la structure d'algèbre E_∞ sur les cochaines. Cette structure d'E_∞-cogèbre induit en particulier une structure de cogèbre coassociative.

Date: 9 décembre 2021.

1.2. **La cogèbre colibre.**

Proposition 1. *Le foncteur d'oubli*
$$\mathsf{U}_{As} : \mathsf{As-cog} \to \mathsf{Ch}$$
est comonadique. En particulier , il a un adjoint à droite L^{As} *qui à* V *associe la cogèbre colibre de* V.

La cogèbre colibre $\mathrm{L}^{As}\mathrm{V}$ peut être construite au moyen d'une algorithme.

(1) Un premier candidat pour la cogèbre colibre $\mathrm{L}^{As}\mathrm{V}$ est
$$\mathrm{L}_0\mathrm{V} = \mathrm{V}^{As}$$
cependant, il manque un «bon» morphisme $\mathrm{L}_0\mathrm{V} \to \mathrm{L}_0\mathrm{L}_0\mathrm{V}$;

(2) On peut alors un sous objet $\mathrm{L}_1\mathrm{V}$ de $\mathrm{L}_0\mathrm{V}$ défini comme le pullback
$$\begin{tikzcd} \mathrm{L}_1\mathrm{V} \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{V}^{As})^{As} \arrow[d] \\ \mathrm{V}^{As} \arrow[r] & \mathrm{V}^{As \triangleleft As}. \end{tikzcd}$$
On a alors un morphisme $\mathrm{L}_1\mathrm{V} \to \mathrm{L}_0\mathrm{L}_0\mathrm{V}$ mais pas encore (a priori) de «bon» morphisme $\mathrm{L}_1\mathrm{V} \to \mathrm{L}_1\mathrm{L}_1\mathrm{V}$.

(3) On construit de manière similaire un sous objet $\mathrm{L}_2\mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{L}_1\mathrm{V}$...

(4) $\cdots$

(5) On définit alors $\mathrm{L}^{As}\mathrm{V} = \varprojlim_n \mathrm{L}_n\mathrm{V}$.

Proposition 2 (Anel)**.** *Le morphisme* $\mathrm{L}_{n+1}\mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{L}_n\mathrm{V}$ *est un isomorphisme dès que* $n \geq 1$.

Corollaire 1. *La catégorie des cogèbres a toutes les limites et toutes les colimites.*

Théorème 1 (Riehl)**.** *La catégorie des cogèbres est présentable.*

1.3. **Constructions tensorielles.**

Proposition 3. *La catégorie des cogèbres possède une structure monoidale telle que le foncteur d'oubli*
$$\mathsf{U}_{As} : \mathsf{As-cog} \to \mathsf{Ch}$$
est monoidal strict.

Démonstration. Étant donné deux cogèbres V, W, leur produit tensoriel $\mathrm{V}\otimes\mathrm{W}$ est muni de la structure de cogèbre
$$\mathrm{V}\otimes\mathrm{W} \xrightarrow{w\otimes w} \mathrm{V}\otimes\mathrm{V}\otimes\mathrm{W}\otimes\mathrm{W} \simeq (\mathrm{V}\otimes\mathrm{W})\otimes(\mathrm{V}\otimes\mathrm{W}).$$
□

On a par ailleurs un foncteur "algèbre de convolution" :
$$[-,-] : \mathsf{As-alg} \times \mathsf{As-cog}^{op} \to \mathsf{As-alg}$$
$$(\mathrm{A},\mathrm{V}) \mapsto [\mathrm{V},\mathrm{A}].$$
La produit d'algèbre sur le hom interne $[\mathrm{V},\mathrm{A}]$ envoie f, g vers la composition
$$\mathrm{V} \to \mathrm{V}\otimes\mathrm{V} \xrightarrow{f\otimes g} \mathrm{A}\otimes\mathrm{A} \to \mathrm{A}.$$
De manière équivalente, ce produit est donné par
$$[\mathrm{V},\mathrm{A}]\otimes[\mathrm{V},\mathrm{A}] \to [\mathrm{V}\otimes\mathrm{V},\mathrm{A}\otimes\mathrm{A}] \to [\mathrm{V},\mathrm{A}].$$

Proposition 4. *Le bifoncteur*
$$[-,-] : \mathsf{As-alg} \times \mathsf{As-cog}^{op} \to \mathsf{As-alg}$$
induit une cotensorisation da la catégorie des algèbres par celle des cogèbres au sens où on a un isomorphisme naturel d'algèbres
$$[\mathrm{V}\otimes\mathrm{W},\mathrm{A}] \simeq [\mathrm{W},[\mathrm{V},\mathrm{A}]]$$
qui vérifie des conditions de cohérence supérieures.

1.4. **Enrichissement.**

Lemme 1. *Pour toute cogèbre* V, *le foncteur* $A \mapsto [V, A]$ *a un adjoint à gauche*

$$A \to V \boxtimes A.$$

Démonstration. L'algèbre $V \boxtimes A$ est le quotient de la paire

$$As \triangleleft (V \otimes (As \triangleleft A)) \rightrightarrows As \triangleleft (V \otimes A).$$

□

Lemme 2. *Pour toute algèbre* A, *le foncteur* $V \mapsto [V, A]$ *a un adjoint à gauche*

$$A' \to \{A', A\}.$$

Démonstration. La cogèbre $\{A', A\}$ est l'égalisateur de la paire

$$L^{As}([A', A]) \rightrightarrows L^{As}([As \triangleleft A', A])$$

□

Théorème 2. *La catégorie des algèbres est enrichie, tensorisée et cotensorisée par les cogèbres.*

1.5. **Structures de modèle.**

Théorème 3 (Jardine). *La catégorie des algèbres possède une structure de catégorie de modèle combinatoire transférée à droite par l'adjonction*

$$\mathsf{Ch} \underset{U^{As}}{\overset{As\triangleleft -}{\rightleftarrows}} \mathsf{As{-}alg}.$$

En d'autres termes les équivalences faibles (resp. fibrations) sont les morphismes f *tels que* $U^{As}(f)$ *est une équivalence faible (resp. fibration).*

Théorème 4 (Getzler, Goerss). *La catégorie des cogèbres possède une structure de catégorie de modèle combinatoire transférée à gauche par l'adjonction*

$$\mathsf{As{-}cog.} \underset{L^{As}}{\overset{U_{As}}{\rightleftarrows}} \mathsf{Ch}$$

En d'autres termes les équivalences faibles (resp. fibrations) sont les morphismes f *tels que* $U_{As}(f)$ *est une équivalence faible (resp. fibration).*

Proposition 5. *La catégorie des algèbres est enrichie homotopiquement par les cogèbres au sens où pour toute cofibration* $f : A \to A'$ *et pour toute fibration* $g : B \to B'$, *le morphisme*

$$\{A', B\} \to \{A, B'\}$$

est une fibration qui est acyclique dès que f *est acyclique ou* g *est acyclique.*

1.6. **Cogèbres conilpotentes et algèbres complètes.** Les algèbres associatives sont des exemples particuliers d'algèbres A_∞.

Définition 3. Une A_∞-algèbre est la donnée d'un $\mathbb{K}$-module gradué A muni d'une codérivation de degré -1 et de carré nul sur la cogèbre localement conilpotente

$$\bigoplus_{n\geq 1} (sA)^{\otimes n}.$$

En particulier on a

(1) une différentielle $sV \to sV$
(2) un produit $sV \otimes sV \to sV$ qui est associatif à homotopie près, homotopie qui est donnée par l'application
(3) $sV^{\otimes 3} \to sV$;
(4) etc...

La dg cogèbre conilpotente résultante est notée Bar(A).

On a deux adjonctions

$$\mathsf{As{-}cog}_{conilp} \underset{\mathrm{Bar}}{\overset{\mathrm{Bar}^\vee}{\rightleftarrows}} \mathsf{A}_\infty\mathsf{{-}alg} \rightleftarrows \mathsf{As{-}alg}$$

La deuxième est une équivalence de Quillen. De plus, pour tout algèbre A, le morphisme

$$\mathrm{Bar}^\vee \mathrm{Bar}(A) \to A$$

est un quasi-isomoprhisme.

On aimerait avoir quelque chose de similaire pour les cogèbres.

Définition 4. Une algèbre complète A est une algèbre sur la monade

$$A^{coAs} = \prod_n A^{\otimes n}$$

dans les complexes de chaînes, qui vérifie une condition de limite.

Remarque 1. La catégorie des algèbres complètes est en fait celle des algèbres associatives pronilpotentes.

Définition 5. Une cogèbre A_∞ est la donnée d'un $\mathbb{K}$-module gradué V muni d'une dérivation de degré -1 et de carré nul sur l'algèbre complète

$$\prod_{k\geq 1} (s^{-1}V)^{\otimes 1}.$$

En particulier on a

(1) une différentielle $s^{-1}V \to s^{-1}V$
(2) un coproduit $s^{-1}V \otimes s^{-1}V \to s^{-1}V$ qui est associatif à homotopie près, homotopie qui est donnée par l'application
(3) $s^{-1}V \to s^{-1}V^{\otimes 3}$;
(4) etc...

La dg algèbre complète résultante est notée Cobar(V).

Théorème 5 (LG, Lejay). *On a deux adjonctions*

$$\mathsf{As{-}cog} \rightleftarrows \mathsf{A}_\infty\mathsf{{-}cog} \underset{\mathrm{Cobar}^\vee}{\overset{\mathrm{Cobar}}{\rightleftarrows}} \mathsf{coAs{-}alg}_{comp}$$

De plus, pour tout A_∞*-cogèbre* V, *le morphisme*

$$V \to \mathrm{Cobar}^\vee \mathrm{Cobar}(V)$$

est un quasi-isomorphisme.

Remarque 2. Cependant, l'adjonction reliant les A_∞-cogèbres aux As-cogèbres n'est plus (a priori) une équivalence de Quillen.

Proposition 6. *Soit* A *une algèbre et* V *une cogèbre localement conilpotente. Alors, on a un isomorphisme canonique*

$$\{\mathrm{Bar}^\vee V, A\} \simeq \mathrm{Cobar}^\vee([V, A]).$$

1.7. **Espace des morphismes et déformation.** Les enrichissements en cogèbres permettent de décrire les espaces de morphismes.

Le foncteur des chaînes d'un ensemble simplicial se factorise par les cogèbres

$$\mathsf{sSet} \to \mathsf{As{-}cog} \to \mathsf{Ch}.$$

Dès lors, pour deux algèbre A, A' où A est cofibrant l'espace des morphismes de A vers A' est représenté par l'ensemble simplicial

$$\mathrm{Map}^\Delta(A, A')_n = \hom(A, [c\Delta[n], A']).$$

Il est également représenté par l'ensemble cubique

$$\mathrm{Map}^\square(A, A')_n = \hom(A, [c\Delta[1]^{\otimes n}, A']).$$

La version cubique est préférable au sens où elle participe d'un enrichissement-tensorisation-cotensorisation des algèbres par les ensembles cubiques.

1.8. **Déformation des morphismes.** Soit $f : A \to A'$ un morphisme d'algèbres. Il induit un problème de module formel

$$\begin{aligned} \mathrm{Def}_f : \mathsf{CAlg}_{art} = \mathsf{CCog}_{coart} &\to \infty - \text{groupoids} \\ V &\mapsto \mathrm{Map}(V, \{A, A'\}) \times_{\mathrm{Map}(\mathbb{K}, \{A, A'\})} \{f\} \end{aligned}$$

Exemple 2. Si $V = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}.\epsilon$ with $w(\epsilon) = 1 \otimes \epsilon + \epsilon \otimes 1$, alors $\mathrm{Def}_f(V)_0$ est l'ensemble des f-dérivations, c'ets-à-dire les morphismes de complexes de chaînes $g : A \to A'$ tels que

$$g(a_1 a_2) = f(a_1) g(a_2) + g(a_1) f(a_2).$$

Exemple 3. Dans le cas où $A = \mathrm{Bar}^\vee W$, alors f est un élément de Maurer-Cartan de $[V, A']$, c'est-à-dire une élément de degré -1 tel que

$$\partial f + f^2 = 0.$$

Dès lors, Def_f est encodé par l'algèbre de Lie dg $[V, A']$ dont la différentielle est $d + [f, -]$

1.9. **Perspective.**

(1) les cogèbres sont elles-aussi enrichies en cogèbres ;
(2) les algèbres (ou les cogèbres) sur une opérades non-symmétrique sont enrichies, tensorisées, cotensorisées en cogèbres coassociatives counitaires ;
(3) les algèbres (ou les cogèbres) sur une opérades sont enrichies, tensorisées, cotensorisées en cogèbres cocommutative counitaires ;
(4) les algèbres (ou les cogèbres) sur une opérades de la forme ΩC (ce qui concerne la plupart des remplacements cofibrants d'opérades) sont enrichies, tensorisées, cotensorisées en E_∞ cogèbres ;

2. Le formalisme des opérades

2.1. **Cogèbre sur une opérade.**

Définition 6. Une cogèbre sur une opérade P est la donnée de

(1) un complexe de chaînes V et un morphisme d'opérade

$$P \to co\mathcal{E}nd(V)$$

où $co\mathcal{E}nd(V)(n) = [V, V^{\otimes n}]$;

(2) un complexe de chaînes V et des morphismes

$$P(n) \otimes V \to V^{\otimes n}$$

qui vérifient certaines propriétés ;

(3) un morphisme d'opérades colorées

$$P \to \mathcal{E}nd(\mathsf{Ch}^{op}).$$

Définition 7. La catégorie des cogèbre sur une opérade P est la catégorie

$$\mathfrak{Op}(P, \mathcal{E}nd(\mathsf{Ch}^{op}))^{op}.$$

Proposition 7 (Anel, Smith). *Le foncteur d'oubli*

$$\mathsf{P{-}cog} \to \mathsf{Ch}$$

est comonadique.

2.2. **Produit de Hadamard et convolution.**

Définition 8. La catégorie des opérades monochrome a une structure monoidale dite de Hadamard telle que

$$P \otimes_H Q(n) = P(n) \otimes Q(n).$$

Définition 9. Une opérade de Hopf nc est un comonoide pour le produit tensoriel de Hadamard.

2.3. **Produit tensoriel d'algèbres et de cogèbres.**

Définition 10. Etant donné des opérades (monochrome) P, Q et $\mathrm{R} = \mathrm{P} \otimes_{\mathrm{H}} \mathrm{Q}$, on a un foncteur

$$\begin{aligned} \mathsf{P\text{-}cog} \times \mathsf{Q\text{-}cog} &\to \mathsf{R\text{-}cog} \\ (\mathrm{V}, \mathrm{W}) &\mapsto \mathrm{V} \otimes \mathrm{W}. \end{aligned}$$

La structure de cogèbre sur $\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$ est donné par

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P}(n) \otimes \mathrm{Q}(n) \otimes \mathrm{V} \otimes \mathrm{W} \arrow[d] \\ \mathrm{V}^{\otimes n} \otimes \mathrm{W}^{\otimes n} \arrow[d, "\simeq"] \\ (\mathrm{V} \otimes \mathrm{W})^{\otimes n}. \end{tikzcd}$$

Proposition 8. *Si* Q *est une opérade de Hopf nc, alors le foncteur*

$$\mathsf{Q\text{-}cog} \times \mathsf{Q\text{-}cog} \xrightarrow{\otimes} \mathrm{Q} \otimes_{\mathrm{H}} \mathsf{Q\text{-}cog} \to \mathsf{Q\text{-}cog}$$

est le produit tensoriel d'une structure monoidale telle que le foncteur d'oubli

$$\mathsf{Q\text{-}cog} \to \mathsf{Ch}$$

est monoidal strict.

On a le même phénomène si on remplace les cogèbres par des algèbres.

2.4. **Convolution et adjoints.**

Définition 11. Etant donné des opérades (monochrome) P, Q et $\mathrm{R} = \mathrm{P} \otimes_{\mathrm{H}} \mathrm{Q}$, on a un foncteur dit de convolution

$$\begin{aligned} \mathsf{P\text{-}alg} \times \mathsf{Q\text{-}cog}^{\mathrm{op}} &\to \mathsf{R\text{-}alg} \\ (\mathrm{A}, \mathrm{V}) &\mapsto [\mathrm{V}, \mathrm{A}]. \end{aligned}$$

La structure d'algèbre sur $[\mathrm{V}, \mathrm{A}]$ est donné par

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P}(n) \otimes \mathrm{Q}(n) \otimes [\mathrm{V}, \mathrm{A}]^{\otimes n} \otimes \mathrm{V} \arrow[d] \\ \mathrm{P}(n) \otimes [\mathrm{V}^{\otimes n}, \mathrm{A}^{\otimes n}] \otimes \mathrm{Q}(n) \otimes \mathrm{V} \arrow[d] \\ [\mathrm{V}^{\otimes n}, \mathrm{P}(n) \otimes \mathrm{A}^{\otimes n}] \otimes \mathrm{V}^{\otimes n} \arrow[d] \\ \mathrm{A}. \end{tikzcd}$$

Proposition 9. *Le foncteur* $\mathrm{V} \mapsto [\mathrm{V}, \mathrm{A}]$ *a un adjoint*

$$\mathrm{A}' \in \mathsf{R\text{-}alg} \mapsto \{\mathrm{A}', \mathrm{A}\} \in \mathsf{Q\text{-}cog}.$$

Proposition 10. *Le foncteur* $\mathrm{A} \mapsto [\mathrm{V}, \mathrm{A}]$ *a un adjoint à gauche*

$$\mathrm{A}' \in \mathsf{R\text{-}alg} \mapsto \mathrm{V} \boxtimes \mathrm{A}' \in \mathsf{P\text{-}alg}.$$

Exemple 4. Prenons $\mathrm{P} = u\mathcal{C}om$. Alors $\mathrm{Q} = \mathrm{R}$. Si on prends $\mathrm{A} = \mathbb{K}$, on obtient la convolution devient la dualité linéaire

$$\mathrm{V} \in \mathsf{Q\text{-}cog} \mapsto \mathrm{V}^* \in \mathsf{Q\text{-}alg}.$$

Cette dualité linéaire a un adjoint "le dual de Sweedler".

Proposition 11. *Supposons que* Q *est une opérade de Hopf nc et* P *un* Q*-comodule à droite. Alors le foncteur*

$$\mathsf{P{-}alg} \times \mathsf{Q{-}cog}^{op} \xrightarrow{[-,-]} \mathsf{P} \otimes_H \mathsf{Q{-}alg} \to \mathsf{P} \otimes_H \mathsf{Q{-}alg}$$

participe d'une cotensorisation des P*-algèbres par la catégorie monoidale des* Q*-cogèbres. Dès lors, les* P*-algèbres sont enrichies, tensorisées, cotensorisées par les* Q*-cogèbres.*

Exemple 5. Pour toute opérade P, les P-algèbres sont enrichies, tensorisées, cotensorisées en cogèbres cocommutative.

2.5. **Meta-convolution.**

Définition 12. One note $\mathfrak{Op}$ la 2-catégorie des opérades colorées dont

(1) les objets sont les opérades colorées ;
(2) les morphismes sont les morphismes d'opérades colorées
(3) les 2-moprhismes $a : f \to g$ sont la données d'éléments

$$a(c) : f(c) \to g(c), \quad c \in couleurs(\mathrm{P})$$

tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P}(c_1, \cdots, c_n; c_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Q}(fc_1, \cdots, fc_n; fc_0) \arrow[d] \\ \mathrm{Q}(gc_1, \cdots, gc_n; gc_0) \arrow[r] & \mathrm{Q}(fc_1, \cdots, fc_n; gc_0). \end{tikzcd}$$

Proposition 12. *La 2-catégorie* $\mathfrak{Op}$ *a une structure monoidale donnée par le produit tensoriel de Hadamard mulitcoloré tel que*

$$couleur(\mathrm{P} \otimes_H \mathrm{Q}) = couleur(\mathrm{P}) \times couleur(\mathrm{Q})$$

et

$$(\mathrm{P} \otimes_H \mathrm{Q})((c_1, d_1), \cdots, (c_n, d_n); (c_0, d_0)) = \mathrm{P}(c_1, \cdots, c_n; c_0) \otimes \mathrm{Q}(d_1, \cdots, d_n; d_0).$$

Dès lors

(1) $\mathrm{E}nd(\mathrm{C}h)$ est un $\mathcal{E}_\infty$-monoid, tout comme $\mathrm{E}nd(\mathrm{C}h^{op})$
(2) $\mathrm{E}nd(\mathrm{C}h)$ est un module (à homotopie près) de $\mathrm{E}nd(\mathrm{C}h^{op})$.
(3) si on a une $\mathcal{A}$-cogèbre Q, alors la catégorie $\mathfrak{Op}(\mathrm{Q}, \mathrm{E}nd(\mathrm{C}h^{op}))$ a une structure de $\mathcal{A}_\infty$-algèbre ;
(4) si on a une $\mathcal{LM}$-cogèbre (P, Q) alors la catégorie $\mathfrak{Op}(\mathrm{P}, \mathrm{E}nd(\mathrm{C}h))$ est cotensorisée par $\mathfrak{Op}(\mathrm{P}, \mathrm{E}nd(\mathrm{C}h))^{op}$.

2.6. **La construction de Boardman–Vogt.** Problème : pas d'intervalle dans les

Proposition 13. *La construction*

$$Interval \times \mathsf{Operad}_{cat} \to \mathsf{Operad}_{cat}$$

est oplax monoidale.

Corollaire 2. *Si on prend comme intervalle* $\mathrm{H} = c\Delta[1]$*, alors pour toute opérade* Q *de Hopf nc* $\mathrm{W_H Q}$ *est Hopf nc et pour tout* Q*-comodule* P, $\mathrm{W_H P}$ *est un* $\mathrm{W_H Q}$*-comodule.*

Exemple 6. L'opérade $\mathrm{E}_\infty = \mathrm{W_H}u\mathrm{C}om$ est Hopf nc. De plus, pour toute opérade P, $\mathrm{W_H P}$ est un E_∞-comodule.

2.7. **Rapple sur la dualité de Koszul.** Soit C une coopérade conilpotente.

Définition 13. On définit $\Omega\mathrm{C}$ comme

$$\Omega\mathrm{C} = \mathrm{T}(s^{-1}\mathrm{C})$$

Définition 14. Une C-cogèbre

$$\mathrm{V} \to \mathrm{C} \triangleleft \mathrm{V}$$

Définition 15. Une C-algèbre

$$\mathrm{A}^{\mathrm{C}} \to \mathrm{A}.$$

Une structure de ΩC-algèbre sur A = coderivation de degré -1 sur $C \triangleleft A$
Une structure de ΩC-cogèbre sur V = derivation de degré -1 sur V^C

$$\Omega C\text{–cog} \underset{\mathrm{Cobar}^\vee}{\overset{\mathrm{Cobar}}{\rightleftarrows}} C\text{–alg}$$

$$C\text{–cog} \underset{\mathrm{Bar}}{\overset{\mathrm{Bar}^\vee}{\rightleftarrows}} \Omega C\text{–alg}$$

2.8. **Dualité de Koszul et enrichissement.**

Théorème 6. *Toute opérade de la forme* $P = \Omega C$ *a une structure de* E_∞*-Hopf-comodule à gauche et une structure de* E_∞*-Hopf-comodule à droite.*

Considérons des opérades $P = \Omega C$, $Q = \Omega D$ et R ainsi qu'un diagramme de suite symétriques

$$\begin{tikzcd} s^{-1}\overline{C} \arrow[r] \arrow[d] & R \otimes_H s^{-1}\overline{D} \arrow[d] \\ P \arrow[r] & R \otimes_H Q \end{tikzcd}$$

tel que le morphisme $P \to R \otimes_H Q$ est un morphisme d'opérades.
Cela induit un foncteur

$$\begin{aligned} R\text{–alg} \times Q\text{–cog}^{op} &\to P\text{–alg} \\ (A, V) &\mapsto [V, A]. \end{aligned}$$

De plus, le foncteur $V \mapsto [V, A]$ a un adjoint

$$A' \in P\text{–alg} \mapsto \{A', A\} \in Q\text{–cog}.$$

Proposition 14. *Soit* $A = \mathrm{Bar}_C^\vee(V)$ *une* P*-algèbre et soit* M *une* R*-algèbre. Alors* $[V, M]$ *a une structure de* D*-algèbre complète donnée par*

$$\begin{tikzcd} {[V,M]^D \otimes V} \arrow[d] \\ \bigoplus_n [V,M]^D \otimes C(n) \otimes V^{\otimes n} \arrow[d] \\ \bigoplus_n [D(n), [V,M]^{\otimes n}] \otimes C(n) \otimes V^{\otimes n} \arrow[d] \\ \bigoplus_n [D(n), [V^{\otimes n}, M^{\otimes n}]] \otimes R(n) \otimes D(n) \otimes V^{\otimes n} \arrow[d] \\ \bigoplus_n [V^{\otimes n}, M^{\otimes n}] \otimes R(n) \otimes V^{\otimes n} \arrow[d] \\ \bigoplus_n M^{\otimes n} \otimes R(n) \arrow[d] \\ M. \end{tikzcd}$$

De plus

$$\{A, M\} = \mathrm{Cobar}_D([V, M]).$$

E-mail address: bricelegrignou@gmail.com