

Université Pierre et Marie Curie
Faculté de mathématiques
Mémoire de Master
Maître de stage : Gabriele Vezzosi

Problèmes de déformation et algèbres de Lie différentielles graduées

Brice Le Grignou

Paris, le 15 juin 2013

Table des matières

Table des matières	3
1 Introduction	5
1.1 Problèmes de déformation et algèbres de Lie différentielles graduées	5
1.2 Préliminaires et notations	7
2 Infinies catégories	9
2.1 Introduction	9
2.2 Catégories simpliciales et topologiques	9
2.3 Quasi-catégories	15
3 Spectres et déformation	25
3.1 Spectres et E_∞ -algèbres	25
3.2 Problèmes de modules formels	30
3.3 Théorie de la déformation	32
4 Déformation, E_∞-algèbres et algèbres de Lie différentielles graduées	35
4.1 Algèbres différentielles graduées et modèles	35
4.2 Théorie de la déformation des E_∞ -algèbres	38
4.3 Complexes de Chevalley-Eilenberg	41
4.4 Foncteur de dualité de Koszul	45
A Ensembles simpliciaux	49
A.1 Catégorie simpliciale	49
A.2 Ensembles simpliciaux	49
A.3 Homotopie	50
A.4 Représentation géométrique	52
B Catégories monoïdales, monoïdes et catégories enrichies	53
B.1 Catégorie monoïdale	53
B.2 Monoïdes et monoïdes commutatifs	54
B.3 Catégorie enrichie sur une catégorie monoïdale	54
Bibliographie	57

Chapitre 1

Introduction

1.1 Problèmes de déformation et algèbres de Lie différentielles graduées

Ce mémoire porte sur l'article *Derived Algebraic Geometry X* de Jacob Lurie, en particulier les deux premiers chapitres, c'est-à-dire le cas où les corps sont de caractéristique nulle. L'auteur y relie les problèmes de déformation sur un corps de caractéristique nulle et les algèbres de Lie différentielles graduées sur ce même corps.

Historiquement, les problèmes de déformation sont d'abord des problèmes de classification et consistent, grossièrement, à partir d'un espace A et d'un type de structure, à classer toutes les structures de ce type possibles sur A , à équivalence près. Voici quelques exemples historiquement fondateurs :

1. Le premier problème qui a été étudié systématiquement est celui de Kodaira-Spencer : si M est une variété différentielle lisse, on cherche à déterminer les structures presque complexes sur cette variété à isomorphisme près. Plus formellement, on cherche à déterminer une application lisse entre variétés lisses $D \rightarrow B$ telle que chaque fibre d'élément $b \in B$ soit isomorphe à M comme variété lisse et soit munie d'une structure presque complexe ; de plus, deux fibres ne doivent pas être isomorphes deux à deux comme variétés presque complexes (on a alors construit un espace de modules) ; enfin, on souhaite que toutes les structures presque complexes possibles sur M soit représentées par $D \rightarrow B$. Malheureusement, ce n'est pas toujours possible. On choisit donc une structure particulière M_0 que l'on déforme de la façon suivante : à partir d'un espace lisse B (base) et d'un point $b_0 \in B$, on cherche à étudier les applications lisses de la forme $D \rightarrow B$ telles que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} M_0 & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{b_0\} & \longrightarrow & B \end{array}$$

soit un pullback, c'est-à-dire que la fibre de $D \rightarrow B$ au dessus de b_0 soit M_0 .

2. Structure de Poisson : si M est une variété différentielle lisse, une structure de Poisson est une section du produit extérieur du fibré tangent $\Lambda^2 TM$, qui annule le crochet de Lie. Le problème de déformation consiste à classer ces structures à isomorphismes de fibrés près sur M .
3. Si A est un \mathbb{R} -espace vectoriel, on cherche à déterminer les structures d'algèbres associatives à isomorphisme près, c'est à dire, les lois $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ telles que $\mu(\mu(\cdot, \cdot), \cdot) = \mu(\cdot, \mu(\cdot, \cdot))$. Deux telles structures sont équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par un automorphisme de A . Traitons plus précisément ce dernier exemple. On introduit le complexe de cochaînes :

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\text{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes(n+1)}, A))_{n \in \mathbb{N}},$$

où la dérivation est nulle $d = 0$, et qui est muni d'une structure d'algèbre de Lie différentielle graduée par le crochet de Lie $[f, g] = f * g + (-1)^{pq} g * f$ si $f \in \mathfrak{g}_p$ et $g \in \mathfrak{g}_q$ et où $f * g = \sum_{i=1}^n (-1)^i f \circ_i g$ et $f \circ_i g$ est la composition de f avec g en $i^{\text{ème}}$ position ($f \circ_i g(x_0, \dots, x_{p+q}) = f(x_0, \dots, x_{i-1}, g(x_i, \dots, x_{i+q}), \dots, x_{p+q})$). On définit $MC(\mathfrak{g})$, l'espace des structures de Maurer-Cartan de \mathfrak{g} , comme les éléments $x \in \mathfrak{g}_1$ tels que

$$dx + \frac{1}{2}[x, x] = 0,$$

c'est à dire les lois bilinéaires associatives sur A . On a alors codé l'ensemble des structures de produit associatif sur A au moyen d'une algèbre de Lie différentielle graduée. Il nous reste toutefois à quotienter cet espace de Maurer-Cartan afin d'obtenir les produits associatifs à automorphisme près. Cet exemple a été traité par Murray Gerstenhaber [GER].

La formalisation introduite dans le premier exemple peut se transposer par analogie le monde des schémas sur un corps \mathbb{K} . Ainsi, la déformation d'un schéma (sur \mathbb{K}) S_0 sur une base (B, b_0) (où B est un \mathbb{K} -schéma et b_0 est un point de B) est un diagramme pullback :

$$\begin{array}{ccc} S_0 & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \text{Spec}(\mathbb{K}) & \xrightarrow{b_0} & B \end{array}$$

tel que p est plat (c'est l'équivalent de lisse).

Le problème de déformation consiste à chercher l'ensemble des $p : D \rightarrow B$ à isomorphisme près pour une base B donnée. Cela se traduit par un foncteur :

$$\begin{aligned} Y : \text{Sch}_{\mathbb{K}}^{op} &\rightarrow \text{Set} \\ B &\mapsto \{(D, p)\} / \sim \end{aligned}$$

où $\text{Sch}_{\mathbb{K}}$ est la catégorie des \mathbb{K} -schémas et Set celle des ensembles. Si on se restreint aux bases affines, on obtient un foncteur :

$$\begin{aligned} X : \text{CAlg}_{\mathbb{K}} &\rightarrow \text{Set} \\ A &\mapsto Y(\text{Spec}(A)) \end{aligned}$$

En s'inspirant de l'approche par foncteur de points de Grothendieck, on écrit $X(R) = \text{hom}_{\text{Sch}_{\mathbb{K}}}(\text{Spec}(R), X)$, et on considère ainsi X comme un espace dès que Y est représentable. On dit que X est un espace de modules.

Le deuxième exemple peut laisser à penser qu'il y ait un lien entre les problèmes de déformation et les algèbres de Lie différentielles graduées. De fait, une conjecture de Pierre Deligne, Vladimir Drinfeld et Boris Feigin affirme, comme le rappelle Lurie dans l'introduction de [DAG X] :

"Si X est un espace de module sur un corps \mathbb{K} de caractéristique 0, alors un voisinage formel de X est contrôlé par une algèbre de Lie différentielle graduée."

Essayons de voir ce que "voisinage formel" signifie. Si X est une variété algébrique affine $X = \text{Spec}(A)$ (où A est une \mathbb{K} -algèbre commutative de type fini), alors un point fermé de X s'identifie à un morphisme d'algèbres $\phi : A \rightarrow \mathbb{K}$, ce qui correspond à un idéal maximal \mathfrak{M} de A . On définit la complétude formelle en $x \in X$ de X comme le foncteur d'anneau $X^\wedge : \text{CAlg}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Set}$ tel que :

$$X^\wedge(R) = \{f \in X(R) = \text{hom}(\text{Spec}(R), X) \mid f(\text{Spec}(R)) \subseteq \{x\} \subseteq \text{Spec}(A)\} \quad (1.1)$$

La complétude formelle de X correspond exactement au morphismes $f : A \rightarrow R$ qui envoient les éléments de \mathfrak{M} sur des éléments nilpotents de R .

Comme on s'intéresse aux propriétés locales, la discussion précédente nous incite à restreindre le foncteur X aux algèbres locales artiniennes, c'est-à-dire de dimension finie en tant qu'espace vectoriel sur \mathbb{K} et qui ont un idéal maximal unique; on peut montrer qu'il est formé d'éléments nilpotents. D'autre part, cette intention d'étudier les problèmes de modules localement nous pousse à imposer que $X(\mathbb{K})$ soit réduit à un point. Dès lors, on définit un problème de module formel classique comme un foncteur $X : \text{Art}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Set}$ tel que $X(\mathbb{K}) = \{*\}$ ($\text{Art}_{\mathbb{K}}$ est la catégorie des \mathbb{K} -algèbres artiniennes).

Le problème est donc de relier les problèmes formels de modules sur \mathbb{K} de caractéristique nulle aux algèbres de Lie différentielles graduées sur ce même corps \mathbb{K} . Pour ce faire, Lurie place le problème dans un monde "homotopique" où les algèbres commutatives deviennent des E_{∞} -algèbres, les catégories des ∞ -catégories, les ensembles des espaces...

Nous présenterons donc dans une première partie le formalisme des ∞ -catégories. Puis, nous introduirons les problèmes formels de modules qui sont les analogues "homotopiques" des problèmes formels de modules classiques. Enfin nous montrerons comment relier ceux-ci aux algèbres de Lie différentielles graduées.

Dans toute la suite \mathbb{K} est un corps de caractéristique nulle.

1.2 Préliminaires et notations

1.2.1 Préliminaires

L'algèbre homologique [SCA] constitue la base de ce mémoire qui s'appuie fortement sur les théories des catégories monoïdales et des catégories enrichies sur une catégorie monoïdale [HTT,A.1] et des ensembles simpliciaux [GJ] dont on rappelle des éléments en annexe. Le lecteur doit également connaître la théorie des catégories de modèle [DS]. De plus, l'introduction utilise quelques notions de théorie des schémas et de géométrie complexe.

Soit :

1. **Ab** la catégorie des groupes abéliens.
2. **Top** la catégorie des espaces topologiques. Elle est munie d'une structure de modèle où :
 - W les équivalences faibles sont les équivalences faibles d'homotopie.
 - Fib les fibrations sont les fibrations de Serre.
 - Cof les cofibrations sont les morphismes qui ont la propriété de lissage à gauche par rapport aux fibrations acycliques.
 C'est bien une structure de modèle par la proposition 8.3 de [DS].
3. **CW** la catégorie des CW-complexes.
4. **CW_{*}** la catégorie des CW-complexes pointés.
5. **CGHaus** (*compactly generated Hausdorff*) la sous-catégorie de **Top** formée des espaces topologiques X tels que
 - un sous-espace Y est fermé dans X si et seulement si $Y \cap K$ est fermé dans K pour tout compact K de X (compactement engendré).
 - X est séparé (Hausdorff).
6. **sSet** la catégorie des ensembles simpliciaux. Elle est munie d'une structure de modèle où :
 - W les équivalences faibles sont les équivalences faibles d'homotopie (c'est-à-dire que leurs réalisations géométriques sont des équivalences faibles).
 - Fib les fibrations sont les fibrations de Kan.
 - Cof les cofibrations sont les monomorphismes.
 C'est bien une structure de modèle par la proposition 11.3 du premier chapitre de [GJ].

Dans la suite, \mathbf{Top} et \mathbf{sSet} sont munies de ces structures de modèle dites structures usuelles.

Enfin, je ne prends pas généralement en compte les problèmes de théorie des ensembles et d'univers.

1.2.2 Notations

1. Dans le cadre de la théorie des catégories de modèle, les flèches prenant les formes \hookrightarrow et \twoheadrightarrow désignerons respectivement les cofibrations et les fibrations. Les équivalences faibles seront surmontées d'un \sim . La catégorie homotopique d'une catégorie de modèle \mathbf{M} sera notée $\mathbf{Ho}(\mathbf{M})$. En général, la localisation d'une catégorie \mathbf{C} , par rapport à une sous-catégorie \mathcal{W} sera notée $\mathbf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.
2. Lorsque l'on représente une adjonction sous la forme :

$$F : \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D} : G$$

Cela veut dire que l'adjoint à gauche est F .

3. On note autant que possible les infinies catégories avec un police calligraphique et les catégories usuelles avec une police droite.
4. Les notations utilisées pour les ensembles simpliciaux sont celles de l'annexe A.

Chapitre 2

Infinies catégories

2.1 Introduction

Considérons Cat la catégorie des catégories. Les objets sont les catégories et les morphismes sont les foncteurs. Par ailleurs, on sait définir les transformations naturelles (morphismes de foncteurs), c'est-à-dire des morphismes de morphismes ou 2-morphismes. On dit que Cat est munie d'une structure de 2-catégorie.

On peut dès lors imaginer une notion de n -morphisme, de n -catégorie pour tout entier n . Une ∞ -catégorie serait alors une catégorie dans laquelle on aurait défini par récurrence une bonne notion de n -morphisme pour tout n . Malheureusement, il paraît impossible de construire une théorie générale des ∞ -catégories qui soit suffisamment malléable ; par exemple on peut construire une théorie où la commutativité d'un diagramme est définie strictement mais cette théorie ne décrit que peu de structures que l'on peut rencontrer. Si la commutativité n'est demandé qu'à "équivalence près", alors le travail de formalisation devient impossible.

Par ailleurs, on recherche surtout une théorie qui ressemble intuitivement à de l'homotopie. Par exemple, dans la théorie des catégories de modèle, on peut décrire des homotopies entre fonctions. On aimerait prolonger le processus et décrire des homotopies entre homotopies qui seront des 2-morphismes, des homotopies entre 2-morphismes (3-morphismes)... Par ailleurs, l'homotopie dans les catégories de modèle étant une relation d'équivalence (sous des hypothèses supplémentaires), les n -morphismes sont inversibles si $n > 1$. Remarquons que ce processus décrit dans cet exemple mène à la localisation de Dwyer-Kan que nous décrirons.

Plus généralement, on cherche à construire une théorie des ∞ -catégories où les n -morphismes sont inversibles pour $n > 1$.

Une stratégie consiste à considérer les 1-morphismes entre deux objets A et B comme des points d'un espace topologique. Les 2-morphismes sont les chemins entre ces points, les 3-morphismes les homotopies entre chemins... On retrouve là manifestement une description homotopique. On décrit donc une ∞ -catégorie comme :

Définition 2.1.1. Une catégorie topologique est une catégorie enrichie sur la catégorie CGHaus . Les catégories topologiques ainsi que les foncteurs de catégories topologiques s'organisent en une catégorie notée Cat_{Top} .

Remarque 2.1.1. Nous verrons plus loin pourquoi la catégorie est enrichie sur CGHaus et non Top .

2.2 Catégories simpliciales et topologiques

2.2.1 Définitions

Comme, les ensembles simpliciaux sont également un support de l'homotopie, on peut aussi penser aux ∞ -catégories de la façon suivante :

Définition 2.2.1. Une catégorie simpliciale \mathcal{C} est une catégorie enrichie sur les ensembles simpliciaux. Les catégories simpliciales et les foncteurs entre catégories simpliciales s'organisent en une catégorie notée $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$

Malheureusement, seule l'information homotopique nous importe, que ce soit pour les espaces topologiques ou pour les ensembles simpliciaux. Heureusement, les catégories homotopiques des espaces et des ensemble simpliciaux coïncident comme le rappelle le théorème :

Théorème 2.2.1. (GJ, I.11.4) *Le foncteur de réalisation topologique est adjoint à gauche du foncteur singulier :*

$$|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{CGHaus} : \mathit{Sing} \quad (2.1)$$

C'est une adjonction de Quillen (pour les structures de modèle usuelles) qui produit une équivalence :

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{Top}) \simeq \mathbf{Ho}(\mathbf{sSet}) \quad (2.2)$$

On notera indifféremment ces deux catégories \mathbf{H}

Une nouvelle idée serait alors de considérer les ∞ -catégories comme des catégories enrichies sur \mathbf{H}

Définition 2.2.2. On définit $\mathbf{Cat}_{\mathbf{H}}$ la catégorie des catégories enrichies sur \mathbf{H} et des foncteurs correspondant.

Un nouveau problème émerge : on souhaite pouvoir décrire une ∞ -catégorie comme une catégorie simpliciale ou topologique. Or une catégorie enrichie sur \mathbf{H} ne se relève pas forcément en catégorie topologique ou en catégorie simpliciale. On revient donc au formalisme des catégories simpliciales ou topologiques.

Il s'agit maintenant de relier ces deux description *a priori* différentes. Comme le foncteur de réalisation $|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ est à valeurs dans \mathbf{CGHaus} , l'adjonction de Quillen $|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Top} : \mathit{Sing}$ induit une nouvelle adjonction :

$$|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{CGHaus} : \mathit{Sing} \quad (2.3)$$

Lemme 2.2.1 (GJ, I.2.4). *L'adjonction $|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{CGHaus} : \mathit{Sing}$ préserve les limites finies (cela veut juste dire que $|\cdot|$ préserve les limites finies).*

Dès lors, elle induit un dernière adjonction :

$$|\cdot| : \mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}} \rightleftarrows \mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}} : \mathit{Sing} \quad (2.4)$$

Celle-ci n'est bien évidemment pas une équivalence. Cependant, elle nous permet de relier les deux descriptions dans un sens qui se révélera satisfaisant.

Remarque 2.2.1. C'est donc pour relier les catégories topologiques aux catégories simpliciales qu'on les a considérées comme enrichies sur \mathbf{CGHaus} et non sur \mathbf{Top} .

Ce qui nous intéresse dans les descriptions simpliciales et topologiques est avant tout l'information homotopique qu'elles contiennent. On définit donc les équivalences de catégories topologiques (resp. simpliciales) dans un sens plus faible que celui des isomorphismes de $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}}$ (resp. $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$). La définition suivante fait appel à une définition présentée plus loin que je n'introduis pas ici pour ne pas interrompre le cours de cette discussion sur la notion de ∞ -catégorie :

Définition 2.2.3. On dit qu'un foncteur de catégories topologiques $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ est une équivalence si :

1. il induit une équivalence de catégories $\pi_0 F : \pi_0 \mathcal{C}_1 \rightarrow \pi_0 \mathcal{C}_2$ (voir la définition 2.2.4).
2. chaque application (continue) $\mathit{Map}_{\mathcal{C}_1}(X, Y) \rightarrow \mathit{Map}_{\mathcal{C}_2}(F(X), F(Y))$ donné par F est une équivalence faible dans \mathbf{Top} , c'est-à-dire qu'elle produit des isomorphismes au niveau des groupes d'homotopies.

De la même façon, on définit la notion d'équivalence pour les foncteurs de catégories simpliciales.

On remarque par ailleurs que les foncteurs canoniques $\mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{H}$ et $\mathbf{CGHaus} \rightarrow \mathbf{H}$ préservent le produit et donc induisent des foncteurs $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}} \rightarrow \mathbf{Cat}_{\mathbf{H}}$ et $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}} \rightarrow \mathbf{Cat}_{\mathbf{H}}$. Ces derniers font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}} & \xrightleftharpoons[\text{Sing}]{|\cdot|} & \mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}} \\ & \searrow h & \swarrow h \\ & \mathbf{Cat}_{\mathbf{H}} & \end{array}$$

Dès lors, les équivalences de catégories topologiques ou simpliciales correspondent exactement aux morphismes de $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}}$ ou $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$ dont les images par l'un ou l'autre des foncteurs h sont des isomorphismes.

Pour s'assurer de l'équivalence entre les deux représentations (simpliciale et topologique), il suffit de voir que les applications d'adjonction unitaires et co-unitaires :

$$\mathcal{C} \rightarrow \text{Sing}(|\mathcal{C}|) \quad (2.5)$$

$$|\text{Sing}(\mathcal{D})| \rightarrow \mathcal{D} \quad (2.6)$$

sont des équivalences de catégories simpliciales et topologiques.

On pourrait considérer la catégorie des ∞ -catégories comme la localisation par les équivalences de la catégorie $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}}$ (ou $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}}$). Malheureusement, une telle localisation entraîne des problèmes d'univers au sens de Grothendieck.

Pour résumer, on a une adjonction entre $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}}$ et $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$ qui préserve les équivalences et telle que les applications d'adjonctions unitaires et co-unitaires sont des équivalences. Cela suffit pour considérer que les deux formalismes ($\mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}}$ ou $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$, munies des équivalences entre catégories) décrivent la même chose.

2.2.2 Catégorie homotopique

Définition 2.2.4. Si \mathcal{C} est une catégorie simpliciale, topologique ou enrichie sur \mathbf{H} , elle induit une catégorie (ordinaire) dite catégorie homotopique $\pi_0\mathcal{C}$ qui vérifie :

1. l'ensemble des objets de $\pi_0\mathcal{C}$ est exactement celui de \mathcal{C}
2. Si X et Y sont deux objets de $\pi_0\mathcal{C}$ (ou \mathcal{C} de manière équivalente), alors :

$$\text{hom}_{\pi_0\mathcal{C}}(X, Y) = \pi_0(\text{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)). \quad (2.7)$$

On a ainsi défini trois foncteurs $\mathbf{Cat}_{\mathbf{Top}} \rightarrow \mathbf{Cat}$, $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}} \rightarrow \mathbf{Cat}$ et $\mathbf{Cat}_{\mathbf{H}} \rightarrow \mathbf{Cat}$ que l'on dénotera indifféremment par π_0 .

Inversement, on peut considérer une catégorie sous la forme de catégorie simpliciale, topologique ou enrichie sur \mathbf{H} , c'est-à-dire produire des adjoints à droite des foncteurs π_0 :

1. La catégorie topologique \mathcal{C} induite par la catégorie \mathcal{C} a les mêmes objets que cette dernière et pour tout couple d'objet X, Y , $\text{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est l'ensemble $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ muni de la topologie discrète.
2. La catégorie simpliciale \mathcal{C} induite par \mathcal{C} a les mêmes objets que cette dernière et pour tout couple d'objet X, Y , l'ensemble des n -simplexes de $\text{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. De plus les applications dégénérescences et faces sont l'identité.
3. La catégorie enrichie sur \mathbf{H} induite par \mathcal{C} est l'image par h de la catégorie simpliciale (ou topologique) induite par \mathcal{C} .

D'autre part, le correspondant en catégorie supérieure des isomorphismes dans les catégories ordinaires est la notion d'équivalence :

Définition 2.2.5. Une équivalence dans une catégorie simpliciale ou topologique \mathcal{C} est un morphisme (point d'un espace topologique ou 0-simplexe) dont l'image dans $\pi_0(\mathcal{C})$ est un isomorphisme.

Remarque 2.2.2. Il ne faut pas confondre équivalences entre ∞ -catégories (ce sont des foncteurs) et équivalences dans une ∞ -catégorie (ce sont des morphismes).

Dès lors, on peut généraliser la notion de groupoïde :

Définition 2.2.6. Un ∞ -groupoïde est une catégorie topologique ou simpliciale \mathcal{G} tel que $\pi_0(\mathcal{G})$ est un groupoïde.

2.2.3 La localisation de Dwyer-Kan

Une application importante de la formalisation que l'on vient de décrire est la généralisation au monde des ∞ -catégories de la localisation d'une catégorie de modèle.

2.2.3.1 Motivation : complexe d'homotopie

Soit M une catégorie de modèle. L'information contenue dans la donnée des équivalence faibles, des fibrations et cofibrations est plus importante que celle retenue uniquement dans la catégorie homotopique. Par exemple, il existe des relations homotopiques entre les homotopies ; la connaissance de ces relations est perdue lorsque l'on localise.

Si X et Y sont deux objets de M , et si, de plus on fait l'hypothèse que X est cofibrant et Y est fibrant, alors soit Y_1 un *path* objet de Y qui est *very-good* au sens Dwyer et Spalinski [DS, 4.12], c'est-à-dire tel que l'application diagonale $Y \rightarrow Y \times Y$ se factorise par $Y \rightarrow Y_1 \rightarrow Y \times Y$ où :

1. le morphisme $Y_1 \rightarrow Y \times Y$ est une fibration
2. le morphisme $Y \rightarrow Y_1$ est une cofibration acyclique.

Grâce aux hypothèses sur X et Y , on peut montrer (en utilisant les lemmes 4.15 et 4.16 de [DS]) que deux morphismes $f, g : X \rightarrow Y$ sont homotopes si et seulement si il existe $H : X \rightarrow Y_1$, une homotopie de f à g (c'est une relation d'équivalence grâce aux hypothèses).

On veut maintenant étudier les homotopies entre homotopies $X \rightarrow Y_1$ en incluant le fait que deux homotopies peuvent être composées (la donnée d'une homotopie de f_1 vers f_2 et d'une homotopie de f_2 vers f_3 donne lieu à une homotopie de f_1 vers f_3), et poursuivre ce processus aux niveaux homotopiques supérieurs...

Pour cela, on introduit la notion de résolutions simpliciales :

Définition 2.2.7. Soit Y un objet de M . Une résolution simpliciale de Y est la donnée d'un objet simplicial dans la catégorie M noté Y_* ainsi que d'une équivalence faible $Y \rightarrow Y_0$ tels que :

1. l'objet Y_0 est fibrant (en d'autres termes, Y_0 est un remplacement fibrant de Y).
2. tous les morphismes faces de Y_* sont des fibrations acycliques. Dès lors, tous les objets Y_n sont fibrants.
3. Soit (d_*, Y_n) le diagramme :
 - a) pour tout $0 \leq i \leq n+1$, une copie (d_i, Y_n) de Y_n
 - b) pour tout $0 \leq i < j \leq n+1$, une copie $(d_i d_j, Y_{n-1})$ de Y_{n-1}
 - c) des paires de morphismes : $d_{j-1} : (d_j, Y_n) \rightarrow (d_i d_j, Y_{n-1}) \leftarrow (d_i, Y_n) : d_i$. Ces flèches sont des fibrations acycliques.

Alors le morphisme $Y_{n+1} \rightarrow \lim(d_*, Y_n)$ est une fibration.

Une résolution simpliciale est dite cofibrante si les dégénérescences et $Y \rightarrow Y_0$ sont des cofibrations acycliques.

Définition 2.2.8. Une résolution simpliciale Y_* de Y peut être considérée comme un objet simplicial dans M muni d'un morphisme $i : Y \rightarrow Y_*$ (ici Y représente l'objet simplicial constant sur M formé à partir de Y), et ayant quelques propriétés supplémentaires. Dans ce cadre, un morphisme de résolutions simpliciales de Y , $f : Y_* \rightarrow Y'_*$ est un morphisme simplicial qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad} & Y'_* \\ & \searrow & \nearrow \\ & Y & \end{array}$$

Définition 2.2.9. Un résolution cosimpliciale de X , objet de M est une résolution simpliciale de M^{op} (munie de la structure de modèle opposée, c'est-à-dire que l'on conserve les équivalences faibles et on inverse fibrations et cofibrations). On définit dualement les notions de résolution cosimpliciale fibrante et de morphisme de résolutions cosimpliciales sur un objet.

Dès lors, on définit :

Définition 2.2.10. La suite double $hom_M(X^n, Y_m)_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}}$ a une structure naturelle d'ensemble bisimplicial si X^* est une résolution cosimpliciale de X et Y_* une résolution simpliciale de Y . On définit $diag(hom_M(X^*, Y_*))$ comme le complexe homotopique de (X, Y) .

Le complexe homotopique est censé représenter toute l'information homotopique. Il ne dépend donc pas, à homotopie près des résolutions et corésolutions choisies. D'autre part, ce complexe doit toujours pouvoir être construit.

Proposition 2.2.1. *Tout objet d'une catégorie de modèle M a au moins une résolution simpliciale cofibrante et une résolution cosimpliciale fibrante.*

Démonstration. On montre le résultat pour les résolutions simpliciales par récurrence.

– Si $*$ est l'objet final de M , alors $Y \rightarrow *$ peut être factorisée :

$$Y \xhookrightarrow{\sim} Y_0 \twoheadrightarrow *$$

On obtient Y_0 et une cofibration acyclique allant de Y vers Y_0 .

– Supposons que l'on ait construit Y_i pour $0 \leq i \leq n$ et les applications faces et dégénérescences correspondantes qui sont respectivement des fibrations acycliques et des cofibrations acycliques, alors on définit (s_*, Y_n) comme le diagramme formé de copies (s_i, Y_n) de Y_n pour $0 \leq i \leq n$ et de copies $(s_i s_j, Y_{n-1})$ de Y_{n-1} pour $0 \leq i < j \leq n$ et des applications

$$(s_i, Y_n) \xleftarrow{s_j^{-1}} (s_i s_j, Y_{n-1}) \xrightarrow{s_i} (s_j, Y_n) .$$

Alors l'application canonique $colim(s_*, Y_n) \rightarrow lim(d_*, Y_n)$ est une équivalence faible qui peut être factorisée par :

$$colim(s_*, Y_n) \xhookrightarrow{\sim} Y_{n+1} \twoheadrightarrow \sim lim(d_*, Y_n) .$$

□

Les résolutions simpliciales cofibrantes (resp. cosimpliciales fibrantes), jouent le même rôle pour les résolutions simpliciales (resp. cosimpliciales) que les *very-good path* (resp. *cylinder*) objets pour les *path* (resp. *cylinder*) objets.

Lemme 2.2.2 (DK3, 6.9 et 6.10). *1. Soit Y_* et Y'_* des résolutions simpliciales de Y . Alors, si Y'_* est cofibrante, il existe un morphisme de résolutions $Y_* \rightarrow Y'_*$.*

2. Soit X^ des X'^* des résolutions cosimpliciales de X . Alors, si X'^* est fibrante, il existe un morphisme de résolutions $X'^* \rightarrow X^*$*

Idée de la preuve. Les morphismes sont construits par récurrence.

□

Proposition 2.2.2 (HIR, 17.3.4). *Si $f : X'^* \rightarrow X^*$ est un morphisme de résolutions cosimpliciales de X et $g : Y'_* \rightarrow Y_*$ est un morphisme de résolutions simpliciales de Y , alors ils induisent un morphisme d'ensemble simpliciaux $\text{diag}(\text{hom}_M(X^*, Y_*)) \rightarrow \text{diag}(\text{hom}_M(X'^*, Y'_*))$ qui est une équivalence faible d'homotopie (c'est-à-dire un morphisme dont la réalisation géométrique est une équivalence faible d'homotopie).*

Corollaire 2.2.1. *On peut construire une chaîne finie d'équivalences faibles d'homotopie :*

$$A_1 \rightarrow A_2 \leftarrow A_3$$

entre deux complexes d'homotopie A_1 et A_3 d'une même paire d'objets (X, Y) . D'où, le complexe d'homotopie est unique à équivalence faible près.

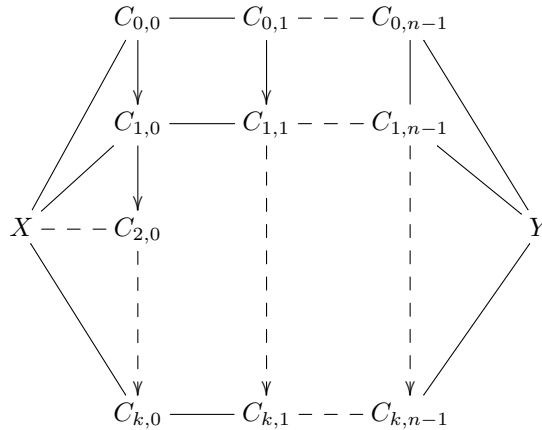
On cherche à construire une catégorie simpliciale \mathcal{L} qui résume l'information homotopique décrite plus haut, autrement dit, telle que :

1. $\pi_0(\mathcal{L}) = \text{Ho}(M)$
2. pour tout couple d'objets X, Y , $\text{Map}_{\mathcal{L}}(X, Y)$ est homotopiquement équivalent au complexe d'homotopie de (X, Y) .

Cela peut se faire par un procédé appelé localisation de Dwyer-Kan. Il existe en fait deux constructions équivalentes (homotopiquement) de cette localisation : la localisation dite simpliciale [DK 1] et la localisation hamac [DK 2] que nous présentons.

2.2.3.2 Localisation hamac

Soit C une (petite) catégorie et W une sous-catégorie. Pour tout couple d'objets (X, Y) de C , on définit l'ensemble simplicial $\text{Map}_{L^H(C, W)}(X, Y)$ dont les k -simplexes sont les "hamacs réduits" de largeur k (de longueur quelconque $n \geq 0$) entre X et Y , c'est-à-dire les diagrammes de la forme :



tels que :

1. la longueur n est supérieure ou égale à 0 (si $n = 0$, le hamac consiste en k fois le même morphisme de X vers Y).
2. toutes les flèches verticales sont dans W (et orientées vers le bas).
3. dans chaque colonne, toutes les flèches vont dans le même sens, et si elles vont vers la gauche, alors elles sont dans W .
4. les flèches de colonnes adjacentes ont des sens opposés.
5. aucune colonne ne contient que l'identité.

La $i^{\text{ème}}$ application face d_i consiste à omettre la $i^{\text{ème}}$ ligne (et composer les flèches verticales correspondantes). La $j^{\text{ème}}$ application de dégénérescence consiste à répéter la $j^{\text{ème}}$ ligne. Si le hamac résultant n'est pas réduit (cela peut arriver après utilisation d'un application face), alors on met en oeuvre l'algorithme de réduction :

1. si une colonne ne contient que l'identité, alors on l'omet.

2. on compose deux colonnes adjacentes dès qu'elles vont dans le même sens.

En outre, si X, Y et Z sont des objets de \mathbf{C} , alors, il y a une composition naturelle $Map_{L^H(\mathbf{C}, \mathbf{W})}(X, Y) \times Map_{L^H(\mathbf{C}, \mathbf{W})}(Y, Z) \rightarrow Map_{L^H(\mathbf{C}, \mathbf{W})}(X, Z)$ qui consiste, à chaque degré, à composer les hamacs puis réduire le hamac résultant. Il y a bien évidemment un 0-simplexe qui correspond à l'identité pour cette composition : c'est la flèche identité. Dès lors :

Proposition 2.2.3. *La donnée des objets de \mathbf{C} , des ensembles simpliciaux $Map_{L^H(\mathbf{C}, \mathbf{W})}$ et de la composition constitue une catégorie simpliciale $L^H(\mathbf{C}, \mathbf{W})$. C'est la localisation hamac (ou de Dwyer-Kan) de \mathbf{C} relativement à \mathbf{W} .*

Les morphismes de X vers Y de la catégorie localisée $\mathbf{C}[\mathbf{W}^{-1}]$ sont les chaînes de flèches successives (c'est-à-dire les éléments de $Map_{L^H(\mathbf{C}, \mathbf{W})}(X, Y)_0$) à une équivalence près. Cette équivalence est enfantée par la relation notée \mathfrak{R} et telle que si $f, g \in Map_{L^H(\mathbf{C}, \mathbf{W})}(X, Y)_0$ alors $f \mathfrak{R} g$ si et seulement si :

$$\exists h \in Map_{L^H(\mathbf{C}, \mathbf{W})}(X, Y)_1, d_0(h) = f, d_1(h) = g \quad (2.8)$$

Cela se traduit par :

Proposition 2.2.4. *Pour tous objets $X, Y \in \mathbf{C}$:*

$$\pi_0(Map_{L^H(\mathbf{C}, \mathbf{W})}(X, Y)) = hom_{\mathbf{C}[\mathbf{W}^{-1}]}(X, Y), \quad (2.9)$$

et donc :

$$\pi_0(L^H(\mathbf{C}, \mathbf{W})) = \mathbf{C}[\mathbf{W}^{-1}]. \quad (2.10)$$

Ainsi, une des idées sous-jacentes de la localisation de Dwyer-Kan (ici, c'est la localisation hamac) est d'étudier l'homotopie des chaînes de flèches.

On a par ailleurs un foncteur canonique $\mathbf{C} \rightarrow L^H(\mathbf{C}, \mathbf{W})$ pour toute catégorie usuelle \mathbf{C} (considérée par le foncteur comme une catégorie simpliciale). Ce foncteur vérifie une propriété fondamentale de factorisation des foncteurs $\mathbf{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre catégories enrichies sur \mathbf{H} .

Un des problèmes qui apparait est que le processus de localisation directe comme on vient de le décrire peut produire des problèmes d'univers (je me réfère ici à la théorie des univers due à Alexandre Grothendieck). Si \mathbf{M} est une catégorie de modèle et \mathbf{W} la sous-catégorie des équivalences faibles, alors un résultat de [DK2] nous assure que pour étudier l'homotopie de $Map_{L^H(\mathbf{M}, \mathbf{W})}(X, Y)$ pour deux objets X , et Y , il suffit de considérer les hamacs n'ayant que trois colonnes, les flèches de la première allant vers la gauche.

Remarque 2.2.3. On a le même genre de résultat pour la localisation classique $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}[\mathbf{W}^{-1}]$.

2.2.3.3 Localisation de Dwyer-Kan et complexe d'homotopie

Pour conclure, on admet le résultat fondamental suivant :

Théorème 2.2.2 (DK 3, 4.4). *Soit \mathbf{M} une catégorie de modèle. Pour tous objets X, Y de \mathbf{M} , si X^* est une résolution cosimpliciale de X et Y_* est une résolution simpliciale de Y , les ensembles simpliciaux $diag(hom_{\mathbf{M}}(X^*, Y_*))$ et $Map_{L^H(\mathbf{M})}(X, Y)$ ont même type d'homotopie.*

2.3 Quasi-catégories

La notion de quasi-catégorie a été introduite en 1983 par Boardman et Vogt, puis développée par André Joyal et Jacob Lurie. C'est cette notion qui est la plus utilisée pour décrire les ∞ -catégories ; en effet, bien que moins intuitive *a priori* que l'approche précédente (catégories simpliciales ou topologiques), elle est beaucoup plus puissante et permet de généraliser au monde des catégories supérieures beaucoup de concepts de la théorie des catégories usuelles.

2.3.1 Définitions et premières applications

Définition 2.3.1. Une quasi-catégorie est un ensemble simplicial \mathcal{C} tel que pour tout $n \geq 2$ et $0 < i < n$, les morphismes de la forme $\Lambda_i^n \rightarrow \mathcal{C}$ se prolongent à Δ^n :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

Cette définition ressemble à celle des complexes de Kan, tout en étant plus faible. Pour cette raison, on appelle parfois les quasi-catégories complexes de Kan faibles.

Essayons de comprendre le sens de la définition précédente ainsi que le lien avec la notion intuitive de ∞ -catégorie. Déjà, les 0-simplexes peuvent être pensés comme aux objets et les 1-simplexes aux 1-morphismes. La source d'un tel morphisme f est $d_1(f)$ et sa cible est $d_0(f)$.

$$d_1(f) \xrightarrow{f} d_0(f)$$

Un 2-simplexe α correspond alors à un triangle de morphismes :

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ B & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

où $f = d_2(\alpha)$, $g = d_0(\alpha)$ et $h = d_1(\alpha)$. Cela signifie qu'il y a une homotopie entre la composition des flèches du haut et la flèche du bas. Par ailleurs, la condition d'extension de $\Lambda_i^n \rightarrow \mathcal{C}$ à Δ^n se traduit lorsque $n = 2$ et $i = 1$, par le fait que si on a deux 1-morphismes composables f et g (c'est à dire que $d_0(f) = d_1(g)$), alors on peut trouver α un 2-simplexe de \mathcal{C} tel que $d_2(\alpha) = f$ et $d_0(\alpha) = g$; dans ce cas, on peut penser à $d_1(\alpha)$ comme à $g \circ f$. Le fait que l'on ait pas une seule extension possible de $\Lambda_i^n \rightarrow \mathcal{C}$ à Δ^n signifie que $g \circ f$ est défini seulement à homotopie près.

Dans le formalisme que l'on vient de décrire, une catégorie ordinaire \mathbf{C} s'interprète sous la forme de l'ensemble simplicial $N(\mathbf{C})$ appelé nerf de \mathbf{C} et défini par :

1. l'ensemble des 0-simplexes $N(\mathbf{C})_0$ est l'ensemble des objets de \mathbf{C} .
2. si $n > 0$, l'ensemble des n -simplexes $N(\mathbf{C})_n$ est l'ensemble des suites de longueur n de morphismes de \mathbf{C} composables $\{(f_1, \dots, f_n) \mid \text{source}(f_{i+1}) = \text{cible}(f_i)\}$.
3. si $n > 1$ l'application face $d_i : N(\mathbf{C})_n \rightarrow N(\mathbf{C})_{n-1}$ compose le $i^{\text{ème}}$ et le $(i+1)^{\text{ème}}$ morphismes, c'est à dire envoie (f_1, \dots, f_n) sur $(f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1} \circ f_i, f_{i+2}, \dots, f_n)$
4. si $n = 1$, d_0 envoie un morphisme à sa cible, et d_1 à sa source.
5. l'application dégénérescence $s_i : N(\mathbf{C})_n \rightarrow N(\mathbf{C})_{n+1}$ ajoute l'identité à la $i^{\text{ème}}$ place, c'est-à-dire envoie (f_1, \dots, f_n) sur $(f_1, \dots, f_{i-1}, id, f_i, \dots, f_n)$. En particulier, si $n = 0$, s_0 associe à un objet X le morphisme id_X .

On dispose d'un théorème qui détecte si une quasi-catégorie est le nerf d'une catégorie :

Théorème 2.3.1 (HTT, 1.1.2.2). *Soit K un ensemble simplicial. Alors, K est le nerf d'une catégorie si et seulement si, pour tout $n \geq 2$ et $0 < i < n$, toute application $\Lambda_i^n \rightarrow K$ est étendue sur Δ^n par un unique morphisme :*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & K \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

Par ailleurs, dans le cadre des quasi-catégories on pose :

Définition 2.3.2. Un ∞ -groupeïde est une complexe de Kan.

D'autre part, un foncteur entre quasi-catégories est juste un morphisme d'ensembles simpliciaux. Cependant les foncteurs entre deux quasi-catégories peuvent s'organiser en un ensemble simplicial :

Définition 2.3.3. Si K et X sont deux ensembles simpliciaux, alors on note $Fun(K, X)$ le complexe fonctionnel du couple (K, X) , c'est-à-dire l'ensemble simplicial défini par :

1. les n -simplexes sont $Fun(K, X)_n = hom_{sSet}(K \times \Delta^n, X)$.
2. les faces et dégénérescences sont induites respectivement par les application codégénérescences $\Delta^n \rightarrow \Delta^{n-1}$ et cofaces $\Delta^n \rightarrow \Delta^{n+1}$.

De plus, on a :

Proposition 2.3.1 (HTT, 1.2.7.3). *Si K et \mathcal{C} sont deux ensembles simpliciaux et si \mathcal{C} est une quasi-catégorie, alors $Fun(K, \mathcal{C})$ est également une quasi-catégorie.*

Les foncteurs entre quasi-catégories peuvent donc s'organiser en une quasi-catégorie de manière très simple. C'est là l'une des forces de l'approche des quasi-catégories par rapport à celle des catégories simpliciales ou topologiques. En revanche, il paraît très difficile avec cette approche de construire un ensemble simplicial $Map_{\mathcal{C}}(X, Y)$ pour deux objets X et Y (d'une quasi-catégorie \mathcal{C}). De même il semble difficile de construire une catégorie homotopique (catégorie ordinaire) $\pi_0\mathcal{C}$.

Plusieurs questions fondamentales se posent à l'issue de cette discussion : quel est le lien entre les quasi-catégories et les catégories simpliciales ou topologiques. D'autre part, si ce lien est fait, retrouve-t-on les mêmes notions de généralisation de catégories ordinaires, d' ∞ -groupeïdes, de foncteurs... Enfin, qu'est-ce qu'une équivalence entre quasi-catégories ?

2.3.2 Relations avec les catégories simpliciales ou topologiques et catégorie homotopique

Définition 2.3.4. On note, Cat_{Kan} la catégorie des catégories enrichies sur la catégorie des complexes de Kan (sous-catégorie pleine de $sSet$).

Le lien entre le formalisme des quasi-catégories et celui des catégories simpliciales ou topologiques se fait grâce au théorème suivant :

Théorème 2.3.2. *Il existe une adjonction :*

$$\mathfrak{C} : sSet \rightleftarrows Cat_{sSet} : N^{coh} \quad (2.11)$$

Cette première adjonction en induit une nouvelle :

$$|\cdot| \circ \mathfrak{C} : sSet \rightleftarrows Cat_{Top} : N^{coh} \circ Sing \quad (2.12)$$

On a de plus :

1. l'image de Cat_{Kan} par N^{coh} est dans la sous-catégorie de $sSet$ des quasi-catégories.
2. Si \mathcal{C} est une catégorie topologique, on peut identifier les objets de \mathcal{C} avec les 0-simplexes de $N^{coh}(Sing(\mathcal{C}))$ et les morphismes avec les 1-simplexes.
3. Dès lors, se donner un 2-simplexe de $N^{coh}(Sing(\mathcal{C}))$:

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ f_1 \nearrow & & \searrow f_2 \\ X & \xrightarrow{f_3} & Z \end{array}$$

revient à se donner une chemin entre f_3 et $f_2 \circ f_1$ dans $Map_{\mathcal{C}}(X, Z)$.

4. l'application d'adjonction co-unitaire $Map_{\mathfrak{C}(N^{coh}(Sing(\mathcal{C})))}(X, Y) \rightarrow Map_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est une équivalence faible d'homotopie.

5. Si \mathcal{C} est une catégorie ordinaire, alors on peut identifier $N(\mathcal{C})$ et $N^{coh}(\mathcal{C})$ (si l'on considère \mathcal{C} comme une catégorie simpliciale).

Remarque 2.3.1. Le foncteur N^{coh} est appelé nerf cohérent.

Remarque 2.3.2. Il paraît plus simple de relier les quasi-catégories aux catégories topologiques plutôt qu'aux catégories simpliciales en général car dans le second cas, il faut se restreindre à Cat_{Kan} .

À présent, on peut définir les notions d'équivalences entre catégories et de catégories homotopiques pour les quasi-catégories :

Définition 2.3.5. Si \mathcal{C} est un ensemble simplicial, alors on définit $\pi(\mathcal{C})$, la catégorie homotopique de \mathcal{C} , par $\pi(\mathcal{C}) = \pi_0(\mathfrak{C}(\mathcal{C}))$. On a ainsi construit un foncteur $\pi : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Cat}$. En outre un morphisme de \mathcal{C} est qualifié d'équivalence si son image par π (on peut parler de l'image d'un morphisme par π parce que \mathfrak{C} l'envoie sur les morphismes de $\mathfrak{C}(\mathcal{C})$) est un isomorphisme.

Remarque 2.3.3. Joyal a produit un théorème assez simple qui permet de détecter facilement les équivalences d'une quasi-catégorie [HTT, 1.2.4.3].

Proposition 2.3.2. *Le foncteur $N : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{sSet}$ est adjoint à droite de $\pi : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Cat}$.*

Démonstration. Le foncteur de généralisation d'une catégorie ordinaire en catégorie simpliciale gen est adjoint à droite de π_0 . De plus N^{coh} est adjoint à droite de \mathfrak{C} . Dès lors, $\pi = \pi_0 \circ \mathfrak{C}$ est adjoint à gauche de $N^{coh} \circ gen$ qui n'est autre que N d'après le théorème précédent 2.3.2. \square

Définition 2.3.6. Une équivalence de catégories entre quasi-catégories $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur dont l'image par \mathfrak{C} est une équivalence de catégories simpliciales.

Voyons maintenant si la définition de ∞ -groupeoïde que nous avons introduite précédemment pour les quasi-catégories est cohérente avec la définition antérieure (définition dans le cadre des catégories enrichies).

Proposition 2.3.3 (HTT, 1.2.5.1). *Soit K un ensemble simplicial. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. K est une quasi-catégorie et $\pi(K)$ un groupeoïde.
2. K satisfait la condition d'extension des morphismes $\Lambda_i^n \rightarrow K$ à Δ^n pour tout $n \geq 2$ et $0 \leq i < n$.
3. K satisfait la condition d'extension des morphismes $\Lambda_i^n \rightarrow K$ à Δ^n pour tout $n \geq 2$ et $0 < i \leq n$.
4. K est un complexe de Kan.

Remarque 2.3.4. En particulier, on a des conditions affaiblies pour détecter les complexes de Kan.

Comme on l'a vu, la description des ∞ -catégories par quasi-catégories rend certaines constructions difficiles à appréhender. Cependant, c'est un outil très puissant qui permet de généraliser au monde des ∞ -catégories beaucoup de notions des catégories ordinaires. Dans la suite, nous n'utiliserons presque plus que cette approche.

2.3.3 Généralisations de notions de la théorie des catégories

On cherche ici à généraliser dans le monde des quasi-catégories des concepts utilisés dans le cadre des catégories ordinaires.

2.3.3.1 Catégorie opposée

Si \mathcal{C} est une quasi-catégorie, alors on définit \mathcal{C}^{op} par :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_n^{op} = \mathcal{C}_n$
2. les applications faces sont $(d_i : \mathcal{C}_n^{op} \rightarrow \mathcal{C}_{n-1}^{op}) = (d_{n-i} : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_{n-1})$
3. les applications dégénérescences sont $(s_i : \mathcal{C}_n^{op} \rightarrow \mathcal{C}_{n+1}^{op}) = (s_{n-i} : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_{n+1})$.

Il est clair que \mathcal{C}^{op} est une quasi-catégorie. On l'appelle la quasi-catégorie opposée de \mathcal{C} .

2.3.3.2 Sous-catégorie d'une quasi-catégorie (générée par une sous-catégorie homotopique)

Soit \mathcal{C} une quasi-catégorie, et $(\pi(\mathcal{C}))'$ une sous-catégorie de la catégorie homotopique $\pi(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} . Alors, en formant le pullback dans \mathbf{sSet} :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}' & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ N((\pi(\mathcal{C}))') & \longrightarrow & N(\pi(\mathcal{C})) \end{array}$$

on a construit une nouvelle quasi-catégorie \mathcal{C}' que l'on dénote comme la sous-catégorie de \mathcal{C} générée par $(\pi(\mathcal{C}))'$. De plus, on a :

Proposition 2.3.4. *En reprenant les notations précédentes, si $(\pi(\mathcal{C}))'$ est une sous-catégorie pleine de $\pi(\mathcal{C})$, alors, \mathcal{C}' est une sous-catégorie pleine (au sens des catégories topologiques ou simpliciales) de \mathcal{C} .*

Démonstration. Il suffit de remarquer que le foncteur N^{coh} préserve les limites. \square

2.3.3.3 Objet initial, objet final

Définition 2.3.7. Un objet d'une ∞ -catégorie (c'est-à-dire un 0-simplexe d'une quasi-catégorie) est initial (resp. final) si il est initial (resp. final) dans la catégorie homotopique.

Dans une catégorie usuelle il y a au plus un objet initial et un objet final. Ce n'est pas le cas dans une quasi-catégorie. Cependant, on a une unicité "à homotopie près".

Proposition 2.3.5 (HTT, 1.2.12.9). *Soit \mathcal{C} une quasi-catégorie et \mathcal{C}' sa sous-catégorie pleine engendrée par les éléments finaux. Alors \mathcal{C}' est vide ou est un complexe de Kan.*

2.3.3.4 Catégorie jointe

Les catégories jointes sont des constructions qui ne sont pas fondamentales dans la théorie classique des catégories. En revanche, leurs généralisations sont capitales pour la construction des catégories sur/sous un objet ainsi que des limites et colimites dans le cadre des quasi-catégories.

Définition 2.3.8. Si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont deux catégories, alors $\mathcal{C} * \mathcal{D}$ est la catégorie telle que :

1. les objets de $\mathcal{C} * \mathcal{D}$ sont l'union de ceux de \mathcal{C} et de ceux de \mathcal{D}
2. les morphismes sont :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{C} * \mathcal{D}}(X, Y) = \begin{cases} \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \text{si } X, Y \in \mathcal{C} \\ \mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) & \text{si } X, Y \in \mathcal{D} \\ \emptyset & \text{si } X \in \mathcal{D}, Y \in \mathcal{C} \\ * & \text{si } X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (2.13)$$

Dans le cadre des quasi-catégories, définir une catégorie jointe demande une étude préalable des ensembles simpliciaux augmentés. La catégorie cosimpliciale augmentée Δ_+ est la catégorie cosimpliciale usuelle Δ à laquelle on ajoute l'ensemble vide comme objet initial. On note $[n_+]$ les éléments de Δ_+ , où :

1. $[n_+] = [n - 1] = \{0, \dots, n - 1\}$.
2. $[0_+] = \emptyset$.

Un ensemble simplicial augmenté est un foncteur $\Delta_+^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$. On note \mathbf{sSet}_+ la catégorie des ensembles simpliciaux augmentés. Par ailleurs, on a un plongement $i : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSet}_+$ défini par :

$$i(X)([n_+]) = \begin{cases} X_{n-1} & \text{si } n > 0 \\ \{*\} & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

On a également un foncteur "d'oubli" $Forget : \mathbf{sSet}_+ \rightarrow \mathbf{sSet}$ tel que $Forget \circ i = id_{\mathbf{sSet}}$.

D'autre part, la concaténation d'ensemble induit un application $\Delta_+ \times \Delta_+ \rightarrow \Delta_+$. Celle-ci nous donne un autre foncteur $\mathbf{sSet}_+ \rightarrow \mathbf{sSet}_{+,+}$, où $\mathbf{sSet}_{+,+}$ est la catégorie des foncteurs $\Delta_+^{op} \times \Delta_+^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$. Ce dernier a un adjoint à gauche que l'on note L . En outre, si A et B sont deux ensembles simpliciaux augmentés, ils définissent un objet $A \times B$ de $\mathbf{sSet}_{+,+}$ par la formule $(A \times B)([n_+], [m_+]) = A([n_+]) \times B([m_+])$. Enfin, si X et Y sont deux ensembles simpliciaux, alors on définit l'ensemble simplicial $X * Y$ par :

$$X * Y = Forget(L((i(X)) \times (i(Y)))). \quad (2.15)$$

Plus concrètement, si S et T sont deux ensembles simpliciaux, alors $S * T$ est tel que :

1. pour tout $n \geq 0$, on a $(S * T)_n = S_n \cup T_n \cup (\cup_{i+j=n-1} S_i \times T_j)$.
2. la $i^{\text{ème}}$ application face de $S * T$ en degré n restreinte à S_n est égale à la $i^{\text{ème}}$ application face de S en degré n .
3. il en est de même pour T_n .
4. restreinte à $S_j \times T_k$, la $i^{\text{ème}}$ application face de $S * T$ en degré n correspond à :
 - a) $(s, t) \mapsto (d_i s, t)$ si $i \leq j$ et $j \neq 0$.
 - b) $(s, t) \mapsto (s, d_{i-j-1} t)$ si $i > j$ et $k \neq 0$.
 - c) $(s, t) \mapsto t \in T_{n-1}$ si $i = j = 0$.
 - d) $(s, t) \mapsto s \in S_{n-1}$ si $k = 0$ et $i = n$.

On a deux propositions très utiles que nous admettrons :

Proposition 2.3.6 (HTT, 1.2.8.2). *Si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont deux catégories au sens usuel, alors, on a un isomorphisme canonique d'ensembles simpliciaux : $N(\mathcal{C} * \mathcal{D}) \simeq N(\mathcal{C}) * N(\mathcal{D})$.*

Proposition 2.3.7 (HTT, 1.2.8.3). *Si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont des quasi-catégories, alors $\mathcal{C} * \mathcal{D}$ en est une.*

2.3.3.5 Catégories sur un objet et catégories sous un objet

Si $p : K \rightarrow \mathcal{C}$ est un diagramme de la quasi-catégorie \mathcal{C} (c'est-à-dire un morphisme entre ensembles simpliciaux), alors, on peut définir la ∞ -catégorie $\mathcal{C}_{/p}$ par les propositions suivantes.

Proposition 2.3.8. *Si $p : K \rightarrow Y$ est un morphisme d'ensembles simpliciaux, alors il existe un unique ensemble simplicial $Y_{/p}$ tel que, pour tout ensemble simplicial Z :*

$$\text{hom}_{\mathbf{sSet}}(Z, Y_{/p}) = \text{hom}_p(Z * K, Y) \quad (2.16)$$

où hom_p signifie que l'on ne considère que les morphismes $g : Z * K \rightarrow Y$ tels que $g|_K = p$.

Démonstration. Il suffit de prendre $(Y_{/p})_n = \text{hom}_p(\Delta^n * K, Y)$. □

Remarquons, en reprenant les notations de la proposition, que si $a : Y \rightarrow A$ est un autre morphisme d'ensembles simpliciaux, alors il induit un morphisme $a_{/p} : Y_{/p} \rightarrow A_{/(a \circ p)}$.

On admet la proposition suivante :

Proposition 2.3.9 (HTT, 1.2.9.3). *Si $p : K \rightarrow \mathcal{C}$ est un morphisme d'ensembles simpliciaux et si \mathcal{C} est une quasi-catégorie, alors $\mathcal{C}_{/p}$ est une quasi-catégorie. De plus, si $q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est une équivalence de ∞ -catégories, alors elle induit une nouvelle équivalence de quasi-catégories $q_{/p} : \mathcal{C}_{/p} \rightarrow \mathcal{C}'_{/q \circ p}$.*

Les deux propositions définissent bien la ∞ -catégorie $\mathcal{C}_{/p}$ que l'on cherchait à construire plus haut.

Par ailleurs, un 0-simplexe X d'un ensemble simplicial K est dit fortement final si la projection canonique $K_{/X} \rightarrow K$ est une fibration acyclique d'ensembles simpliciaux. Si K est une quasi-catégorie les notions d'objet fortement final et d'objet final coïncident [HTT, 1.2.12.5]. Dès lors, si

X est un objet final d'un quasi-catégorie \mathcal{C} , alors la projection $proj : \mathcal{C}/_X \rightarrow \mathcal{C}$ est une fibration acyclique. D'où, dans le carré :

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & \mathcal{C}/_X \\ \downarrow & & \downarrow \text{proj} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{id} & \mathcal{C} \end{array}$$

la flèche verticale de gauche est une cofibration et celle de droite une fibration acyclique. Donc, il existe un morphisme $s : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/_X$ qui relève la projection, c'est-à-dire tel que $proj \circ s = id_{\mathcal{C}}$. C'est donc une équivalence. On peut donc identifier $\mathcal{C}/_X$ avec \mathcal{C} .

Enfin, dualement, en remplaçant $Z * X$ par $X * Z$ dans la propriété fondamentale de l'avant-dernière proposition, on peut construire $Y_{p/}$ qui vérifie des propriétés duales à celles de $Y/_p$.

2.3.4 Limite et colimite

2.3.4.1 Définition

Soit $p : K \rightarrow Y$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. On définit :

1. une colimite de p comme un objet initial de $Y_{p/}$.
2. une limite de p comme un objet final de $Y/_p$.

Remarque 2.3.5. L'unicité à homotopie près d'un objet initial (resp. final) d'une quasi-catégorie nous donne l'unicité à homotopie près d'une colimite (resp. limite).

Dans ce cadre, un pullback dans Y est la limite d'un diagramme $p : N(A \rightarrow B \leftarrow C) \rightarrow Y$, un pushout est la colimite d'un diagramme $p : N(A \leftarrow B \rightarrow C) \rightarrow Y$ et les (co)limites finies ou petites sont les (co)limites des diagrammes $p : N(I) \rightarrow Y$ où I est une catégorie finie ou petite.

On a également une généralisation des colimites filtrées. Cela correspond au fait que dans le diagramme $p : K \rightarrow Y$, l'ensemble simplicial K est un ensemble simplicial filtré (*sifted*, on se réfère à la définition 5.5.8.1 de *Higher Topos Theory*). La proposition suivante nous montre en quoi c'est une généralisation des colimites filtrées usuelles.

Proposition 2.3.10 (HTT, 5.5.8.6). *Soit K un ensemble simplicial filtré (*sifted*), et \mathcal{C} , \mathcal{D} et \mathcal{E} des ∞ -catégories qui admettent des colimites indexées par K . Soit $f : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ un morphisme (d'ensembles simpliciaux) qui préserve les colimites indexées par K séparément en chaque variable. Alors f préserve les colimites indexées par K .*

Remarque 2.3.6. Attention : dans le monde des ∞ -catégories, il y a une différence entre *sifted* et *filtered*. Je n'ai pas traduit cette différence pour ne pas alourdir de détails la présentation succincte que je fais des colimites filtrées.

Malheureusement, les limites et colimites sont très difficiles à calculer avec cette définition. On essaie alors de se ramener à des limites et colimites homotopiques d'une catégorie de modèle.

2.3.4.2 Calcul explicite : limites et colimites homotopiques d'une catégorie de modèle

Définissons tout d'abord les limites et colimites homotopiques dans le cadre d'une catégorie usuelle \mathcal{C} localisable par une sous-catégorie W (comme par exemple une catégorie de modèle et la sous-catégorie générée par les équivalences faibles). Je donne ici la définition que l'on peut trouver dans [TV, 2.4].

Définition 2.3.9. Soit \mathcal{C} une catégorie (au sens usuel), et W une sous-catégorie. Si I est une (petite) catégorie, soit \mathcal{C}^I la catégorie des foncteurs $I \rightarrow \mathcal{C}$. Soit alors W_I la sous-catégorie de \mathcal{C}^I engendrée par les morphismes de foncteurs (transformations naturelles) dont les morphismes sur tous les objets sont dans W . Alors, le foncteur constant $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^I$ induit un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^I[(W_I)^{-1}]$

qui envoie les morphismes de \mathcal{W} sur des isomorphismes. Il peut donc être factorisé par la projection $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ et le foncteur :

$$c : \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \rightarrow \mathcal{C}^I[(\mathcal{W}_I)^{-1}] \quad (2.17)$$

1. La limite homotopique d'un objet A de $\mathcal{C}^I[(\mathcal{W}_I)^{-1}]$ est (si elle existe) l'objet $\text{holim}_I(A)$ de $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ tel que l'on ait un isomorphisme de foncteurs :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]}(\cdot, \text{holim}_I(A)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}^I[(\mathcal{W}_I)^{-1}]}(c(\cdot), A). \quad (2.18)$$

La functorialité en A de cet isomorphisme de foncteur nous pousse à définir la limite homotopique (si elle existe) comme adjoint à droite de c .

2. On définit hocolim par analogie. Le foncteur hocolim est adjoint à gauche de c (s'il existe).

Remarque 2.3.7. Les limites et colimites homotopiques sont d'abord introduites pour remplacer les limites et colimites qui ne commutent pas avec la localisation d'une catégorie de modèle.

Les limites et colimites homotopiques sont utiles dans le cadre de notre étude grâce à la proposition suivante.

Définition 2.3.10. Une structure de modèle sur une catégorie usuelle est dite combinatoire si la catégorie est présentable (voir la définition 2.3.13) et si il existe un ensemble (et non pas une classe) de cofibrations qui génère toutes les autres par applications de certaines opérations (c'est la notion de catégorie de modèle *cofibrantly generated* [HIR, 11]).

Proposition 2.3.11 (HA, 1.3.3.10). *Soit \mathcal{M} un catégorie de modèle combinatoire, $F : I \rightarrow \mathcal{M}^c$ un diagramme de \mathcal{M}^c sous-catégorie pleine de \mathcal{M} des objets cofibrants, et soit $X \rightarrow \lim(F)$ un morphisme de \mathcal{M}^c . Alors X est un modèle explicite de la limite homotopique du diagramme pour la catégorie de modèle \mathcal{M} si et seulement si la limite du diagramme $N(I) \rightarrow N(\mathcal{M}^c) \rightarrow N^{\text{coh}}(L^H(\mathcal{M}^c, \mathcal{W}))$ existe et X en est un modèle explicite.*

On a bien évidemment une assertion duale pour les colimites.

Remarque 2.3.8. D'après [HA, 1.3.3.2, 1.3.3.3], $N^{\text{coh}}(L^H(\mathcal{M}^c, \mathcal{W}))$ est considéré comme la ∞ -catégorie sous-jacente de \mathcal{M} . De plus, si \mathcal{M} est combinatoire, alors on peut identifier $N^{\text{coh}}(L^H(\mathcal{M}^c, \mathcal{W}))$ avec $N^{\text{coh}}(L^H(\mathcal{M}^f, \mathcal{W}))$ et $N^{\text{coh}}(L^H(\mathcal{M}^o, \mathcal{W}))$ où \mathcal{M}^f (resp. \mathcal{M}^o) est la sous-catégorie pleine de \mathcal{M} des éléments fibrants (resp. fibrants-cofibrants). On peut en fait faire cette identification dès que la catégorie de modèle \mathcal{M} admet des factorisations functorielles.

Pour calculer les limites homotopiques, on peut utiliser le théorème :

Théorème 2.3.3 (GJ, II.9.8). *Si dans un diagramme d'une catégorie de modèle :*

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

tous les objets sont fibrants et l'une des deux flèches est une fibration, alors le pullback donne un modèle explicite du pullback homotopique.

Il y a bien évidemment une version duale de ce lemme faisant appel à des pushouts et des flèches cofibrantes.

2.3.5 La ∞ -catégorie des espaces

Un espace topologique s'identifiant souvent à un complexe de Kan, alors on pose la définition suivante :

Définition 2.3.11. Si \mathbf{Kan} est la sous-catégorie pleine de \mathbf{sSet} formée par les complexes de Kan, alors on définit la ∞ -catégorie des espaces notée \mathcal{S} comme $N(\mathbf{Kan})$

Il y a d'autres manières de décrire \mathcal{S} . Pour cela, on utilise le théorème de Dwyer-Kan :

Théorème 2.3.4 (HA, 1.3.3.7). *Soit \mathbf{A} une catégorie de modèle simpliciale (définition dans [HIR, 9.1.5]), \mathbf{A}^c la sous-catégorie des objets cofibrants et \mathbf{A}^o celle des objets fibrants-cofibrants. Alors, on a une équivalence de ∞ -catégories $N^{coh}(L^K(\mathbf{A}^c, W)) \rightarrow N(\mathbf{A}^o)$ (où W représente les équivalences faibles).*

Or, \mathbf{sSet} peut être munie d'une structure de catégorie de modèle simpliciale telle que la structure de modèle induite coïncide avec la structure usuelle ([HIR, 9.1.13]). De plus, \mathbf{Kan} est la sous-catégorie des objets fibrants-cofibrants de \mathbf{sSet} dans laquelle tout objet est cofibrant. D'où, \mathcal{S} s'identifie à $N^{coh}(L^H(\mathbf{sSet}, W))$. Cette description est beaucoup plus utile pour calculer des limites et des colimites.

2.3.6 Le plongement de Yoneda

Dans le monde des catégories usuelles, le plongement de Yoneda d'une catégorie \mathbf{C} est un foncteur de \mathbf{C} vers la catégorie des foncteurs contravariants de \mathbf{C} vers \mathbf{Set} qui envoie un objet X vers le foncteur $hom_{\mathbf{C}}(\cdot, X)$. Pour s'imaginer la version du plongement de Yoneda dans le monde des ∞ -catégories il suffit de remplacer \mathbf{Set} par \mathcal{S} et hom par Map dans la phrase précédente.

Si K un ensemble simplicial et $\mathcal{C} = \mathfrak{C}(K)$ la catégorie simpliciale correspondante, alors la formule :

$$(X, Y) \rightarrow \mathit{Sing}(|Map_{\mathcal{C}}(X, Y)|) \quad (2.19)$$

induit un foncteur $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Kan}$ entre catégories simpliciales (\mathbf{Kan} est une catégorie ordinaire mais peut être considérée comme une catégorie simpliciale). De plus, il y a une application naturelle $\mathfrak{C}(K^{op} \times K) \rightarrow \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$; on obtient donc un foncteur $\mathfrak{C}(K^{op} \times K) \rightarrow \mathbf{Kan}$, ce qui correspond, par adjonction entre \mathfrak{C} et le nerf cohérent, à un foncteur $K^{op} \times K \rightarrow \mathcal{S}$, qui lui même s'identifie à un foncteur :

$$j : K \rightarrow \mathit{Fun}(K^{op}, \mathcal{S}). \quad (2.20)$$

C'est le plongement de Yoneda.

Proposition 2.3.12 (HTT, 5.1.3.1). *Soit K un ensemble simplicial. Alors, le plongement de Yoneda $j : K \rightarrow \mathit{Fun}(K^{op}, \mathcal{S})$ est pleinement fidèle, c'est-à-dire que le foncteur entre catégories enrichies sur \mathbf{H} induit par j est pleinement fidèle.*

2.3.7 Les adjonctions

Dans le cadre de la théorie des catégories, une adjonction est la donnée de deux foncteurs $L : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ et $R : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ et d'un isomorphisme de bi-foncteurs :

$$hom_{\mathbf{D}}(L(\cdot), \cdot) \simeq hom_{\mathbf{C}}(\cdot, R(\cdot)). \quad (2.21)$$

Il y a plusieurs conséquences importantes :

1. l'existence de morphismes canoniques d'adjonction (unitaire et co-unitaire) de foncteurs $id_{\mathbf{C}} \rightarrow R \circ L$ et $L \circ R \rightarrow id_{\mathbf{D}}$ si $X \in \mathbf{C}$ et $Y \in \mathbf{D}$
2. R commute aux limites et L aux colimites.

On souhaite généraliser cette notion aux ∞ -catégories. Il existe une définition ne faisant appel qu'au formalisme des quasi-catégories. Il existe également une propriété équivalente plus simple :

Définition 2.3.12. Supposons que l'on dispose de foncteurs $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ and $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ entre ∞ -catégories. Une transformation d'adjonction unitaire de f à g est un morphisme $u : id_{\mathcal{C}} \rightarrow g \circ f$ dans $\mathit{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ ayant la propriété que pour tout paire d'objets $c \in \mathcal{C}, d \in \mathcal{D}$, la composition :

$$Map_{\mathcal{D}}(f(c), d) \longrightarrow Map_{\mathcal{C}}(g(f(c)), g(d)) \xrightarrow{u(c)} Map_{\mathcal{C}}(c, g(d))$$

est un isomorphisme dans la catégorie homotopique \mathbf{H} . S'il existe une transformation unitaire d'adjonction de f à g , on dit que f est un adjoint à gauche de g ou que g est un adjoint à droite de f .

2.3.8 Catégories présentables

Une catégorie (ordinaire) \mathcal{C} est dite accessible s'il existe un cardinal infini κ tel que :

1. \mathcal{C} admet des colimites indexées par κ .
2. Il existe un ensemble P (et non une classe) d'objets X de \mathcal{C} tels que le foncteur $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ préserve les colimites indexées par κ et tout objet de \mathcal{C} peut être obtenu comme colimite d'un diagramme indexé par κ et dont les objets sont dans P .

La notion d'accessibilité des ∞ -catégories est une généralisation de la notion d'accessibilité des catégories usuelles.

Définition 2.3.13. Une ∞ -catégorie \mathcal{C} est présentable si elle est accessible et admet des colimites petites (indexées par un ensemble). Une catégorie usuelle est présentable si elle est accessible et admet des colimites petites.

Proposition 2.3.13 (HTT, 5.5.2.4). *Une ∞ -catégorie présentable \mathcal{C} admet des limites petites.*

Cette notion de présentabilité est très utile comme le montre théorème suivant.

Théorème 2.3.5 (HTT, 5.5.2.9, Théorème du foncteur adjoint). *Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur entre ∞ -catégories présentables. Alors :*

1. *Le foncteur F a un adjoint à droite si et seulement si il préserve les petites colimites.*
2. *Le foncteur F a un adjoint à gauche si et seulement si il préserve les petites limites.*

A présent, il s'agit de pouvoir détecter quand une quasi-catégorie est présentable.

Proposition 2.3.14 (HA 1.3.3.9). *Soit \mathbf{A} une catégorie de modèle combinatoire. Alors le nerf cohérent de la localisation de Dwyer-Kan de \mathbf{A}^c (sous-catégorie pleine des objets cofibrants) est présentable.*

Remarque 2.3.9. La proposition précédente est encore vraie si on remplace \mathbf{A}^c par \mathbf{A}^f (sous-catégorie pleine de \mathbf{A} des objets fibrants) ou \mathbf{A}^o (sous-catégorie pleine des objets fibrants-cofibrants) conformément à la remarque 1.3.3.3 de [HA].

Chapitre 3

Spectres et déformation

L'objet du chapitre 2 de l'article *Derived Algebraic Geometry X : Formal Moduli Problems* [DAG X] de Jacob Lurie est d'étudier les problèmes de modules des E_∞ -algèbres sur \mathbb{K} .

La théorie des E_∞ -algèbres est une généralisation des algèbres commutatives ; le principe sous-jacent est de relâcher les relations à homotopie près afin d'obtenir un objet plus général et plus malléable. L'approche se fait traditionnellement au moyen des opérades. Nous introduirons ici une vision topologique grâce aux spectres.

D'autre part, Lurie développe une théorie générale de la déformation qui fait largement appel au formalisme des spectres (et stabilisations).

3.1 Spectres et E_∞ -algèbres

3.1.1 Les spectres topologiques : généralisation des groupes abéliens

Définition 3.1.1. Un spectre X est une suite de CW-complexes pointés $(X_n)_{n \geq 0}$, munie de fonctions $\sigma_n : \Sigma X_n \rightarrow X_{n+1}$ où ΣX_n est la suspension de X_n , c'est-à-dire $X_n \wedge S^1$ (S^1 est le cercle pointé).

Définition 3.1.2. Un Ω -spectre est un spectre $(X_n)_{n \geq 0}$ tel que les fonctions σ_n induisent des équivalences d'homotopies $X_n \rightarrow \Omega X_{n+1}$, où ΩX_{n+1} désigne le *loop* de X_{n+1} , c'est-à-dire l'espace des lacets (c'est un CW-complexe).

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour $n \geq 0$, on a une application :

$$\text{hom}_{\mathbf{H}^*}(S^{n+k}, X_n) \rightarrow \text{hom}_{\mathbf{H}^*}(\Sigma S^{n+k}, \Sigma X_n) \rightarrow \text{hom}_{\mathbf{H}^*}(S^{n+k+1}, X_{n+1}) \quad (3.1)$$

où \mathbf{H}^* désigne la catégorie dont les objets sont les CW-complexes pointés et les morphismes sont les fonctions continues pointées à homotopie (pointée) près. On peut alors donc définir le $k^{\text{ième}}$ groupe (abélien) d'homotopie du spectre X par :

$$\pi_k(X) = \text{colim}_n \pi_{n+k}(X_n). \quad (3.2)$$

Par ailleurs, on peut relier les théories cohomologiques et les spectres.

Définition 3.1.3. On désigne par CW2 la catégorie des paires de CW-complexes :

1. dont les objets sont les couples de CW-complexes (X, Y) tels que $Y \subseteq X$.
2. les morphismes entre deux objets (X, Y) et (X', Y') sont les fonctions continues $f : X \rightarrow X'$ tels que $f(Y) \subseteq Y'$.

Une homotopie entre deux morphismes $f, g : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ de CW2 est une fonction $H : [0, 1] \times X \rightarrow X'$ telle que $H(0, \cdot) = f$, $H(1, \cdot) = g$ et $H([0, 1] \times Y) \subseteq Y'$. On peut alors définir naturellement les équivalences d'homotopies dans CW2 .

Définition 3.1.4. Une théorie cohomologique est une suite de foncteur $H^n : \text{CW2}^{op} \rightarrow \text{Ab}$ ($n \in \mathbb{Z}$) vérifiant :

1. (invariance par homotopie) deux morphismes f et g ont les mêmes images s'ils sont homotopes.
2. (excision) si (X, Y) est un objet de CW2 et si U est un ouvert de X dont la fermeture est contenue dans l'intérieur de Y , alors l'inclusion $(X - U, Y - U) \rightarrow (X, Y)$ induit des isomorphismes en cohomologie.
3. si $((X_i, Y_i))_{i \in I}$ est une collection d'objets de CW2 , alors, on a des isomorphismes : $H^n(\coprod_i X_i, \coprod_i Y_i) \rightarrow \prod_i H^n(X_i, Y_i)$.
4. si $Z \subseteq Y \subseteq X$ sont des CW-complexes, alors on a des morphismes naturel en X, Y et Z : $\partial_{X,Y,Z} H^n(Y, Z) \rightarrow H^{n+1}(X, Y)$ tels que l'on ait la longue suite exacte (naturelle en X, Y et Z) :

$$\dots \rightarrow H^n(X, Y) \rightarrow H^n(X, Z) \rightarrow H^n(Y, Z) \rightarrow H^{n+1}(X, Y) \rightarrow H^{n+1}(X, Z) \rightarrow \dots \quad (3.3)$$

D'autre part, on peut considérer la théorie cohomologique comme une suite de foncteurs de la catégorie des CW-complexes pointés vers Ab en prenant le point de base comme deuxième élément des paires.

Le théorème de représentation de Brown nous donne le lien entre cohomologie et spectres.

Théorème 3.1.1. Soit $(H^n)_{n \geq 0}$ une théorie cohomologique ; alors, il existe un Ω -spectre $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on ait un isomorphisme de foncteurs $\text{CW}_* \rightarrow \text{Ab}$:

$$H^n \simeq \text{hom}_{\mathbb{H}^*}(\cdot, B_n) \quad (3.4)$$

où $B_n = \Omega^{-n} B_0$ si $n < 0$.

Remarque 3.1.1. On a défini les spectres comme des familles indexées sur \mathbb{N} . On aurait pu choisir \mathbb{Z} à la place. En effet, on peut passer de l'un à l'autre des formalismes, d'une part par restriction de \mathbb{Z} à \mathbb{N} , d'autre part par des applications successives du foncteur *loop*. Nous allons voir que cette dualité entre l'indexation sur \mathbb{Z} et l'indexation sur \mathbb{N} vaut aussi dans le monde des spectres des ∞ -catégorie dans la proposition 3.1.1.

Le théorème de représentation de Brown nous dit en particulier que la cohomologie singulière (ou cellulaire) à coefficients dans un groupe abélien G correspond à un spectre : le spectre d'Eilenberg-Mac-Lane de G noté $(K(n, G))_{n \in \mathbb{N}}$.

En outre, on dispose d'un foncteur de la catégorie des spectres vers celle des groupes abéliens donné par $E \mapsto \pi_0 E$. Grâce à l'existence du spectre d'Eilenberg Mac-Lane, on peut affirmer que ce foncteur est surjectif sur les objets.

Les spectres sont ainsi considérés comme une généralisation des groupes abéliens. On peut considérer un groupe abélien comme un spectre en prenant son spectre d'Eilenberg-Mac-Lane.

Définition 3.1.5. Un spectre E est dit connectif si $\pi_n E \simeq 0$ pour tout $n < 0$.

En particulier, un groupe abélien (considéré comme un spectre) est connectif.

3.1.2 Spectres symétriques

Grâce aux spectres, on généralise la notion de groupe abélien. On souhaite dans cette perspective généraliser la notion d'anneau commutatif. Plutôt que d'utiliser les spectres définis plus haut, on va s'intéresser aux spectres "symétriques". En effet, comme on veut construire une généralisation des anneaux commutatifs, on a besoin d'une structure de catégorie monoidale symétrique.

Définition 3.1.6. Un spectre symétrique est la donnée d'un spectre $(X_n)_{n \geq 0}$ et, pour tout $n \geq 0$, d'actions à gauche du groupe symétrique Σ_n sur X_n , continues, qui préservent le point de base, et telles que pour tous $m, n \geq 0$ l'application composée :

$$X_n \wedge S^m \xrightarrow{\sigma_n \wedge id} X_{n+1} \wedge S^{m-1} \xrightarrow{\sigma_{n+1} \wedge id} \dots \longrightarrow X_{n+m}$$

est invariante par l'action de $\Sigma_n \times \Sigma_m$ (qui correspond en fait à une action de Σ_{n+m} pour X_{n+m}), sachant que Σ_m agit sur S^m en permutant les coordonnées. Les spectres symétriques s'organisent en une catégorie dont les morphismes $(X_n)_{n \geq 0} \rightarrow (Y_n)_{n \geq 0}$ sont les suites de fonctions continues $(f_n : X_n \rightarrow Y_n)_{n \geq 0}$ qui commutent avec les fonctions σ_n et les actions de groupes.

Les anneaux commutatifs sont les objets "algèbre commutative" (monoïdes symétriques) de la catégorie **Ab** munie de sa structure monoïdale symétrique canonique (grâce au produit usuel). Le produit *smash* définit une structure monoïdale symétrique sur la catégorie des spectres symétriques. On peut donc considérer :

1. Un "anneau spectre symétrique commutatif" est la donnée de :

- a) une suite de CW-complexes pointés $(R_n)_{n \geq 0}$.
- b) une action à gauche continue du groupe symétrique Σ_n sur R_n .
- c) des multiplications $R_n \wedge R_m \rightarrow R_{n+m}$.
- d) deux applications unité : $S^0 \rightarrow R_0$ et $S^1 \rightarrow R_1$.

Tout cela vérifie des conditions supplémentaires, d'associativité et de commutativité notamment.

2. Un "module spectre symétrique" sur un anneau spectre symétrique commutatif R est la donnée de :

- a) une suite de CW-complexes pointés $(M_n)_{n \geq 0}$.
- b) une action à gauche continue du groupe symétrique Σ_n sur M_n .
- c) des multiplications $M_n \wedge R_m \rightarrow M_{n+m}$

qui vérifient des conditions supplémentaires.

Remarque 3.1.2. On peut bien entendu considérer un anneau spectre symétrique commutatif (ou un module) comme un spectre. Par exemple, dans le cas d'un module $\sigma_n : M_n \wedge S^1 \rightarrow M_{n+1}$ provient des morphismes $S^1 \rightarrow R_1$ et $M_n \wedge R_1 \rightarrow M_{n+1}$.

Remarque 3.1.3. Des définitions précises sont dans [SYS].

3.1.3 Spectres et ∞ -catégories

On essaie de généraliser les idées précédentes au monde des ∞ -catégories.

3.1.3.1 Foncteur *loop*

Soit \mathcal{C} une quasi-catégorie pointée, c'est-à-dire qui contient un objet zéro (objet à la fois initial et final). On note ce dernier 0.

Si \mathcal{F}^Ω désigne la sous-catégorie pleine de $Fun(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathcal{C})$ formée par les diagrammes de la forme

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y \end{array}$$

et qui sont des pullbacks. Alors :

Lemme 3.1.1 (HTT, 4.3.2.15). *Il existe un foncteur $ev_f : \mathcal{F}^\Omega \rightarrow \mathcal{C}$ (resp. $ev_i : \mathcal{F}^\Omega \rightarrow \mathcal{C}$) qui correspond à l'évaluation au 0-simplexe final (resp. initial), c'est-à-dire en Y en bas à droite (resp. X en haut à gauche) dans le diagramme précédent. De plus, c'est une fibration acyclique d'ensembles simpliciaux.*

Dès, lors, par la propriété de lissage, ev_f possède une section $s : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}^\Omega$, c'est-à-dire un morphisme d'ensembles simpliciaux tel que $ev_f \circ s = id_{\mathcal{C}}$:

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & \mathcal{F}^\Omega \\ \downarrow & \nearrow s & \downarrow ev_f \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{id} & \mathcal{C} \end{array}$$

Définition 3.1.7. On définit le foncteur *loop*, $\Omega_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ par : $\Omega_{\mathcal{C}} = ev_i \circ s$.

Concrètement, le foncteur *loop* envoie Y sur X si on reprend l'avant dernier diagramme.

Remarque 3.1.4. En travaillant avec des pushouts au lieu des pullbacks et en inversant l'ordre d'utilisation de ev_i et ev_f , on peut par la même procédure construire le foncteur de suspension $\Sigma_{\mathcal{C}}$.

On espère bien entendu que ce nouveau foncteur *loop* corresponde bien à l'idée que l'on se fait du *loop* dans les espaces topologiques. Si X est un objet de $\mathcal{S}_* \simeq N(\mathbf{Kan})_{*/} \simeq N(\mathbf{Kan}_{*/}) \simeq N(\mathbf{sSet}_{*/})[W^{-1}]$ (on considère X comme un ensemble simplicial), considérons le diagramme dans $\mathbf{sSet}_{*/}$:

$$\begin{array}{ccc} & & * \\ & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X \end{array}$$

Le pullback homotopique nous donne un modèle explicite du pullback de la quasi-catégorie. En transférant ce diagramme dans la catégorie des espaces topologiques pointés, au moyen du foncteur de réalisation $|\cdot|$, et en factorisant la flèche horizontale induite $* \rightarrow |X|$ par $* \rightarrow \text{Path}(|X|)$ qui est une cofibration acyclique et $\text{Path}(|X|) \rightarrow |X|$ qui est une fibration (où $\text{Path}(|X|)$ est l'ensemble des chemins $[0, 1] \rightarrow X$ qui valent le point base en 0, $*$ est envoyé sur le chemin constant au point base, et $\text{Path}(|X|) \rightarrow |X|$ correspond à l'évaluation en 1) alors le pullback homotopique correspond au pullback du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & * \\ & & \downarrow \\ \text{Path}(|X|) & \longrightarrow & |X| \end{array}$$

qui n'est autre que le *loop* usuel.

3.1.3.2 Spectres

On considère toujours une quasi-catégorie pointée \mathcal{C} .

Notations-Terminologie. *Nous désignerons $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ comme la catégorie dont l'ensemble des objets est $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et telle qu'il y a un morphisme $(i, j) \rightarrow (i', j')$ si et seulement si $i \leq i'$ et $j \leq j'$.*

Définition 3.1.8. Un pré-spectre sur \mathcal{C} est un foncteur $F : N(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{C}$ tel que $F((i, j)) = 0$ si $i \neq j$. On désigne par $\mathcal{PSP}(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $\text{Fun}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \mathcal{C})$ formée par les pré-spectres.

Lemme 3.1.2 (Higher Algebra, 1.4.2.1). *L'évaluation d'un pré-spectre au point $(n, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ induit un foncteur $\Omega_{\mathcal{C}}^{\infty-n} : \mathcal{PSP}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$.*

Un pré-spectre nous donne des carrés :

$$\begin{array}{ccc} F(n, n) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F(n+1, n+1) \end{array}$$

On a donc des morphismes canoniques $\beta_n : F(n, n) \rightarrow \Omega_{\mathcal{C}}F(n+1, n+1)$.

Définition 3.1.9. Un spectre sur \mathcal{C} est un pré-spectre sur \mathcal{C} tel que tous les morphismes β_n sont des équivalences. On désigne par $\mathcal{SP}(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{PSP}(\mathcal{C})$ formée par les spectres.

Le théorème suivant nous permet de considérer les spectres plutôt comme des suites $(X_n)_{n \geq 0}$ telles que $X_n \rightarrow \Omega_{\mathcal{C}}X_{n+1}$ est une équivalence pour tout $n \geq 0$.

Proposition 3.1.1 (HA, 1.4.2.6). *Soit \mathcal{C} une catégorie pointée admettant des limites finies. La ∞ -catégorie $\mathcal{SP}(\mathcal{C})$ peut être identifiée avec la limite homotopique du diagramme :*

$$\dots \xrightarrow{\Omega_{\mathcal{C}}} \mathcal{C} \xrightarrow{\Omega_{\mathcal{C}}} \mathcal{C} \xrightarrow{\Omega_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}.$$

Dans la suite, on considérera surtout les spectres comme des suites indexées par \mathbb{N} .

3.1.4 E_∞ -anneaux et E_∞ -algèbres

3.1.4.1 Définitions

On peut généraliser les notions de catégories monoïdales et monoïdales symétriques au monde des quasi-catégories ; Lurie décrit ce genre de généralisation dans [DAG II]. Dans ce cadre, on peut munir $\mathcal{SP}(\mathcal{S}_*)$ (où $\mathcal{S}_* = \mathcal{S}_{/ *}$ et \mathcal{S} est la catégorie des espaces) d'une structure monoïdale symétrique analogue au produit *smash*. Dès lors, on peut considérer les objets "monoïdes commutatifs" :

Définition 3.1.10. Un E_∞ -anneau est une algèbre commutative (monoïde commutatif) de la ∞ -catégorie $\mathcal{SP}(\mathcal{S}_*)$. On note \mathcal{Ring} la ∞ -catégorie des E_∞ -anneaux.

Tout comme les spectres sont une généralisation des groupes abéliens, les E_∞ -anneaux sont une généralisation des anneaux. En particulier, tout anneau peut être considéré comme un E_∞ -anneau ; par exemple \mathbb{K} . Dès cet instant, on considère :

Définition 3.1.11. La ∞ -catégorie des E_∞ -algèbre sur \mathbb{K} est : $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}} = \mathcal{Ring}_{\mathbb{K}/}$

En réalité, on peut définir la catégorie $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}$ de plusieurs manières. Le fait que \mathbb{K} soit de caractéristique 0 donne une formulation particulièrement simple que nous verrons plus tard.

3.1.4.2 Cas particuliers

Ces dernières définitions sont très générales mais paraissent assez peu utiles si on compte les appliquer dans des cas concrets. Fort heureusement, il existe des réalisations de $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}$ qui sont plus malléables.

Définition 3.1.12. Etant donné que l'on peut considérer un objet de $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}$ comme un spectre, alors soit $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{cn}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}$ formée par les éléments connectifs.

Comme \mathbb{K} est de caractéristique 0, on a une description simple de $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{cn}$:

Proposition 3.1.2 (Higher Algebra, 7.1.4.20). *Soit $\mathfrak{sCALg}_{\mathbb{K}}$ la catégorie des \mathbb{K} -algèbres commutatives simpliciales (ou autrement dit les objets simpliciaux sur la catégorie des \mathbb{K} -algèbres commutatives). Elle peut être munie d'une structure de modèle simpliciale où les équivalences faibles (W) sont les équivalences faibles d'ensembles simpliciaux et les fibrations sont les fibrations de Kan (c'est-à-dire les fibrations d'ensembles simpliciaux). Dans ce cadre, on a une équivalence de quasi-catégories :*

$$N^{coh}(L^H(\mathfrak{sCALg}_{\mathbb{K}}^c, W)) \simeq N(\mathfrak{sCALg}_{\mathbb{K}}^o) \simeq \mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{cn} \quad (3.5)$$

où $s\text{CAlg}_{\mathbb{K}}^c$ (resp. $s\text{CAlg}_{\mathbb{K}}^o$) désigne la sous-catégorie pleine de $s\text{CAlg}_{\mathbb{K}}$ des objets cofibrants (resp. fibrants-cofibrants).

Par ailleurs, une version des correspondances de Dold Kan relie par une adjonction de Quillen les \mathbb{K} -algèbres commutatives différentielles graduées (munies d'une structure de modèle que nous verrons plus tard) connectives (c'est-à-dire que les groupes d'homologie H_n sont triviaux si $n < 0$) et les \mathbb{K} -algèbres commutatives simpliciales [EQ, 4.2]. On s'attend donc à ce que les E_∞ -algèbres connectives s'apparentent à des \mathbb{K} -algèbres commutatives différentielles graduées connectives.

En fait, on peut même identifier la ∞ -catégorie $\text{CALG}_{\mathbb{K}}$ avec la localisation de Dwyer-Kan de la catégorie des \mathbb{K} -algèbres commutatives différentielles graduées, comme nous le verrons au chapitre suivant.

3.2 Problèmes de modules formels

Dans son article [DAG X] Lurie ne fait pas que décrire le cas qui nous intéresse (problème de déformation des E_∞ -algèbres sur un corps de caractéristique nulle). Il donne une théorie très générale des problèmes de modules qui utilise largement les spectres.

3.2.1 Contexte de déformation et problèmes formels de modules

Définition 3.2.1. Un contexte de déformation consiste en :

1. une ∞ -catégorie pointée (c'est-à-dire qui a des objets zéros, à la fois initiaux et finaux) et présentable Def .
2. $(E_a)_{a \in T}$ une collection de spectres sur Def indexées par un ensemble T .

Nous allons au chapitre étudier le contexte :

1. Def est la ∞ -catégorie $(\text{CALG}_{\mathbb{K}})_{/\mathbb{K}}$ des E_∞ -algèbres sur \mathbb{K} , augmentées c'est-à-dire munies d'une flèche vers \mathbb{K} .
2. T n'a qu'un seul élément, et le spectre correspondant ressemble à \mathbb{K} , dans un sens que nous verrons.

Par ailleurs :

Définition 3.2.2. Etant donné le contexte de déformation $(\text{Def}, (E_a)_{a \in T})$, un morphisme $\phi : A \rightarrow B$ de Def est élémentaire si il existe $a \in T$, $n > 0$ et un pullback dans Def :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 0 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & \Omega^{\infty-n} E_a \end{array}$$

Un morphisme est dit petit s'il est la composition d'un nombre fini de morphismes élémentaires. Un objet A de Def est dit petit si le morphisme $A \rightarrow 0$ (déterminé à homotopie près) est petit. On note Def^{sm} la sous-catégorie pleine de Def formée par les objets petits.

Proposition 3.2.1. *Un objet zéro 0 de Def est petit.*

Démonstration. Soit $a \in T$ et $n > 0$. Comme le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{id} & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^{\infty-n} E_a & \xrightarrow{id} & \Omega^{\infty-n} E_a \end{array}$$

est un pullback, alors, $0 \rightarrow \Omega^{\infty-n} E_a$ est élémentaire. Par ailleurs, comme E_a est un spectre, alors

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\infty-n} E_a & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{\infty-n-1} E_a \end{array}$$

est un pullback. Dès lors, $\Omega^{\infty-n} E_a \rightarrow 0$ est élémentaire. Donc $0 \rightarrow 0$ est petit. \square

Remarque 3.2.1. Dans son article, Lurie n'impose pas que la ∞ -catégorie $\mathcal{D}ef$ soit pointée. Dès lors, il travaille non pas avec les spectres mais les stabilisations. Cela revient au même pour une ∞ -catégorie pointée (*c.f* le lemme 7.2.2.9 de [HTT]).

Dans ce cadre, on peut définir les problèmes de modules formels :

Définition 3.2.3. Un problème formel de modules est un foncteur $X : \mathcal{D}ef^{sm} \rightarrow \mathcal{S}$ qui vérifie :

1. $X(0)$ est contractile (en d'autres termes, tous ses groupes d'homotopie sont triviaux).
2. Pour tout pullback σ :

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & B' \\ \downarrow & & \downarrow \phi \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

si ϕ est petit, alors $X(\sigma)$ est un pullback de \mathcal{S} .

Soit $\mathcal{M}oduli$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}un(\mathcal{D}ef^{sm}, \mathcal{S})$ formée par les problèmes de modules formels.

3.2.2 Complexe tangent

Soit X un problème formel de module relatif au contexte $(\mathcal{D}ef, (E_a)_{a \in T})$. Comme $\mathcal{D}ef$ est pointé, et que $X(0) \simeq *$, alors X induit un nouveau foncteur $\mathcal{D}ef \rightarrow \mathcal{S}_*$ que l'on dénote également par X .

Les éléments E_a pour $a \in T$ sont des spectres de $\mathcal{D}ef$. Dès lors, $X \circ E_a$ est un pré-spectre.

Lemme 3.2.1. *Pour tout $a \in T$, le pré-spectre $X \circ E_a$ peut être considéré comme un spectre $(X(\Omega^{\infty-n} E_a))_{n \geq 0}$ de \mathcal{S}_* , que nous noterons $X(E_a)$.*

Démonstration. Si $n > 0$, on a vu que la flèche $0 \rightarrow \Omega^{\infty-n} E_a$ est petite pour tout $a \in T$. Par ailleurs, comme E_a est un spectre, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\infty-n+1} E_a & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{\infty-n} E_a \end{array}$$

est un pullback. Par la définition d'un problème formel de modules, l'image de ce pullback par X est un pullback. Dès lors, $(X(\Omega^{\infty-n} E_a))_{n \geq 0}$ est un spectre. \square

Dès lors :

Définition 3.2.4. En reprenant les notations précédentes, le complexe tangent de X est la donnée des spectres $X(E_a)$ sur \mathcal{S}_* pour $a \in T$.

L'intérêt du complexe tangent réside dans la proposition suivante :

Proposition 3.2.2 (DAG X, 1.2.10). *En reprenant les notations précédentes, si $u : X \rightarrow Y$ est un morphisme de problèmes formels de modules (morphisme de $\mathcal{M}oduli$), et si u induit des équivalences de spectres $u : X(E_a) \rightarrow Y(E_a)$ pour tout $a \in T$, alors u est une équivalence.*

Démonstration. On va montrer que, si $A \in \mathcal{D}ef^{sm}$, alors l'application $u(A) : X(A) \rightarrow Y(A)$ est une équivalence. Ainsi, il existe une suite finie de morphisme élémentaire :

$$A = A_n \rightarrow A_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow A_1 \rightarrow A_0 = 0. \quad (3.6)$$

Le morphisme $u(A_0) : X(A_0) \rightarrow Y(A_0)$ est clairement une équivalence. D'autre part, on suppose que $u(A_{i+1}) : X(A_{i+1}) \rightarrow Y(A_{i+1})$ est une équivalence pour $0 < i \leq n$. Par définition d'un morphisme élémentaire, on a un pullback qui prend, au niveau des simplexes de degré 0 et 1 la forme :

$$\begin{array}{ccc} A_i & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{i+1} & \longrightarrow & \Omega^{\infty-p} E_a \end{array}$$

où $a \in T$ et $p > 0$. Comme $0 \rightarrow \Omega^{\infty-p} E_a$ est un petit morphisme, alors les images par X et par Y de ce pullback sont des pullbacks. Dès lors, les équivalences $u(A_{i+1}) : X(A_{i+1}) \rightarrow Y(A_{i+1})$, $u(0) : X(0) \rightarrow Y(0)$ et $u(\Omega^{\infty-p} E_a) : X(\Omega^{\infty-p} E_a) \rightarrow Y(\Omega^{\infty-p} E_a)$ entraînent une nouvelle équivalence $u(A_i) : X(A_i) \rightarrow Y(A_i)$. Le résultat s'obtient alors par itérations successives. \square

3.3 Théorie de la déformation

L'idée du foncteur de déformation est de représenter le problème formel de module dans une certaine ∞ -catégorie \mathcal{E} :

$$X(\cdot) \simeq j(K) \circ \mathfrak{D} = \text{Map}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{D}(\cdot), K). \quad (3.7)$$

où j est le plongement de Yoneda de \mathcal{E} . On espère que le fait d'associer à K (objet de \mathcal{E}) le foncteur $j(K) \circ \mathfrak{D}$ induise une équivalence $\mathcal{E} \simeq \text{Moduli}$. Pour cela, il faut imposer sur \mathfrak{D} , appelé foncteur de déformation ou théorie de la déformation certaines conditions.

Définition 3.3.1. Si $(\mathcal{D}ef, (E_a)_{a \in T})$ est un contexte de déformation, une théorie faible de la déformation est un foncteur $\mathfrak{D} : \mathcal{D}ef^{op} \rightarrow \mathcal{E}$ entre ∞ -catégorie pointées (en particulier \mathcal{E} est pointée) vérifiant les axiomes :

D1 La ∞ -catégorie \mathcal{E} est présentable.

D2 Le foncteur admet un adjoint à gauche \mathfrak{D}' .

D3 Il existe une sous-catégorie pleine \mathcal{E}^0 de \mathcal{E} telle que :

- pour tout objet K de \mathcal{E}^0 , le morphisme unitaire d'adjonction $K \rightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{D}'(K))$ est une équivalence dans \mathcal{E}^0 .
- la sous-catégorie \mathcal{E}^0 contient tout objet zéro de \mathcal{E} .
- pour tout $a \in T$ et $n > 0$, il existe $K_{a,n}$, un objet de \mathcal{E}^0 tel que l'on ait une équivalence $\Omega^{\infty-n} E_a \simeq \mathfrak{D}'(K_{a,n})$.
- Pour tout pushout de \mathcal{E} :

$$\begin{array}{ccc} K_{a,n} & \longrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K' \end{array}$$

où $a \in T$ et $n > 0$, si K est dans \mathcal{E}^0 , alors il en est de même pour K' .

Proposition 3.3.1 (DAG X, 1.3.6, 1.3.7). *Si $(\mathcal{D}ef, (E_a)_{a \in T})$ est un contexte de déformation et $\mathfrak{D} : \mathcal{D}ef^{op} \rightarrow \mathcal{E}$ une théorie faible de la déformation alors :*

- Si K est un objet de \mathcal{E} , le foncteur de déformation faible et le plongement de Yoneda induisent un foncteur $\text{Map}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{D}(\cdot), K) : \mathcal{D}ef^{sm} \rightarrow \mathcal{S}$ qui est un problème formel de modules. Cette construction est "fonctorielle en K " et donc induit un nouveau foncteur $\theta : \mathcal{E} \rightarrow \text{Moduli}$.

2. Pour tout objet K de \mathcal{E} et pour tout $a \in T$, comme $\mathcal{D}\text{ef}$ est pointée et le foncteur $\theta(K)(\cdot) = \text{Map}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{D}(\cdot), K)$ envoie 0 sur $*$, alors, il induit un foncteur de $\mathcal{D}\text{ef}$ vers \mathcal{S}_* que l'on dénote aussi par $\theta(K)$. Dans ce cadre, $\theta(K)(E_a)$ est un spectre de \mathcal{S}_* . De plus cette construction est "fonctorielle en K " et donc induit un foncteur $e_a : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{P}(\mathcal{S}_*)$. Ainsi e_a envoie un objet K sur un spectre $\theta(K)(E_a)$.

Nous pouvons à présent définir clairement une théorie de la déformation.

Définition 3.3.2. Si $(\mathcal{D}\text{ef}, (E_a)_{a \in T})$ est un contexte de déformation et $\mathfrak{D} : \mathcal{D}\text{ef}^{op} \rightarrow \mathcal{E}$ une théorie faible de la déformation alors, on dit que c'est une théorie de la déformation (ou foncteur de déformation) si :

- (D4) Pour tout $a \in T$, le foncteur $e_a : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{P}(\mathcal{S}_*)$ préserve les petites limites filtrées et est conservatif (cela veut dire qu'un morphisme est une équivalence si et seulement si son image par le foncteur est une équivalence).

Le théorème suivant nous montre la puissance de l'approche de Lurie par foncteur de déformation :

Théorème 3.3.1 (DAG X, 1.3.12). *Si $(\mathcal{D}\text{ef}, (E_a)_{a \in T})$ est un contexte de déformation et $\mathfrak{D} : \mathcal{D}\text{ef}^{op} \rightarrow \mathcal{E}$ une théorie de la déformation alors le foncteur $\theta : \mathcal{E} \rightarrow \text{Moduli}$ défini plus haut (proposition 3.3.1) est une équivalence de ∞ -catégories.*

Chapitre 4

Déformation, E_∞ -algèbres et algèbres de Lie différentielles graduées

Montrons à présent le lien entre les problèmes de modules sur les E_∞ -algèbres et les algèbres de Lie différentielles graduées. Nous allons d'abord étudier les catégories modèles sous-jacentes de notre étude, puis définir clairement la théorie de la déformation qui nous intéresse, pour enfin construire un foncteur de déformation adéquat.

4.1 Algèbres différentielles graduées et modèles

Définition 4.1.1. Soit $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ la catégorie des complexes de chaînes de \mathbb{K} -espaces vectoriels (ou espaces vectoriels différentiels gradués). Ses objets sont de la forme :

$$\dots \xrightarrow{d} V_1 \xrightarrow{d} V_0 \xrightarrow{d} V_{-1} \xrightarrow{d} \dots$$

où $d \circ d = 0$. Ses morphismes entre deux objets $V \rightarrow W$ sont les collections d'applications linéaires $f_p : V_p \rightarrow W_p$ qui commutent avec la différentielle. D'autre part, cette catégorie a une structure monoidale symétrique au moyen du produit tensoriel. Ainsi, pour deux objets V et W , on définit $V \otimes W$ par :

1. pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $(V \otimes W)_p = \bigoplus_{p=p'+p''} V_{p'} \otimes_{\mathbb{K}} W_{p''}$
2. la différentielle sur le produit tensoriel est donnée par $d(x \otimes y) = (dx) \otimes y + (-1)^p x \otimes dy$ si $x \in V_p$.
3. La symétrie $V \otimes W \simeq W \otimes V$ est donnée par la somme des isomorphismes $V_{p'} \otimes W_{p''} \simeq W_{p''} \otimes V_{p'}$, chacun multiplié par $(-1)^{p'p''}$

La catégorie $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ a également une structure de modèle canonique combinatoire [DS, 7.2] :

W Les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes (isomorphismes sur les groupes d'homologie)

Fib Les fibrations sont les morphismes $(f_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ tels que f_p est surjectif pour tout p .

Cof Les cofibrations sont les morphismes $(f_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ tels que f_p est injectif pour tout p .

Introduisons à présent deux foncteurs de la catégorie $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ dans elle-même. Ce sont trivialement des équivalences.

1. Si $V = (V_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est un espace vectoriel différentiel gradué, on note $V[n]$ l'espace vectoriel différentiel gradué (par \mathbb{Z}), tel que $V[n]_p = V_{p-n}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et dont la différentielle $d_{V[n]} : V[n]_p \rightarrow V[n]_{p-1}$ coïncide avec $(-1)^n d_V$. On a donc construit le foncteur $[n] : \text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
2. Si $V = (V_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel différentiel gradué, on note V^\vee l'espace vectoriel différentiel gradué "dual inversé", c'est-à-dire tel que $V_p^\vee = \text{hom}_{\mathbb{K}}(V_{-p}, \mathbb{K})$. On a donc construit le foncteur $(\cdot)^\vee : \text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}} \rightarrow (\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}})^{\text{op}}$.

Définition 4.1.2. Soit $\text{Alg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ (algèbre différentielle graduée) la catégorie des monoïdes de $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ (comme catégorie monoïdale) et $\text{CAlg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ (algèbre commutative différentielle graduée) la catégorie des monoïdes symétriques. En d'autres termes, une algèbre différentielle graduée (A_*, d) est un complexe de chaîne muni d'applications \mathbb{K} -bilinéaires $A_p \times A_q \rightarrow A_{p+q}$ et d'un objet $1 \in A_0$ tels que (pour $x \in \mathfrak{g}_p$ et $y \in \mathfrak{g}_q$) :

$$1x = x1 = x, x(yz) = (xy)z, d(xy) = (dx)y + (-1)^p xdy$$

L'algèbre A est commutative si $xy = (-1)^{pq}yx$. Par ailleurs, un morphisme $A \rightarrow B$ de $\text{Alg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ est un morphisme de complexes de chaînes de \mathbb{K} -espaces vectoriels qui est aussi un morphisme d'algèbres, pour les produits définis sur A et B . Enfin $\text{CAlg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ est une sous-catégorie pleine de $\text{Alg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$.

Décrivons deux exemples très utiles dans la suite.

Exemple 4.1.1. Une algèbre A (resp. algèbre commutative) peut être considérée comme une algèbre (resp. algèbre commutative) différentielle graduée ; en effet, il suffit de prendre $A_0 = A$ et $A_p = 0$ si $p \neq 0$. On considérera souvent le corps \mathbb{K} de cette manière.

Exemple 4.1.2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n]$, l'objet de $\text{CAlg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ décrit par :

1. si $n \neq 0$, alors pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $(\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n])_p = \mathbb{K}$ si $p = n$ ou $p = 0$ et $(\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n])_p = \{0\}$ sinon. La structure d'algèbre commutative différentielle graduée est évidente.
2. si $n = 0$, alors $(\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[0])_0 = \mathbb{K}[\epsilon]/\epsilon^2$ et $(\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[0])_p = \{0\}$ si $p \neq 0$.

On note que toutes ces algèbres commutatives différentielles graduées sont des extensions *square-zero* de \mathbb{K} .

Théorème 4.1.1 (DAG X, 2.1.3). *Les catégories $\text{Alg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ and $\text{CAlg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ peuvent être munies de structures de modèle (combinatoires) où un morphisme est une équivalence faible (resp. fibration) s'il est une équivalence faible (resp. fibration) dans $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$.*

Définition 4.1.3. Une algèbre de Lie différentielle graduée est un objet (\mathfrak{g}_*, d) de $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ muni d'un crochet de Lie $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g}_p \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}_q \rightarrow \mathfrak{g}_{p+q}$ tel que :

- Pour $x \in \mathfrak{g}_p$ et $y \in \mathfrak{g}_q$, $[x, y] + (-1)^{pq}[y, x] = 0$.
- Pour $z \in \mathfrak{g}_r$, $(-1)^{pr}[x, [y, z]] + (-1)^{pq}[y, [z, x]] + (-1)^{qr}[z, [x, y]] = 0$ (identité de Jacobi).
- La différentielle est une dérivation par rapport au crochet de Lie : $d[x, y] = [dx, y] + (-1)^p[x, dy]$.

De plus, un morphisme d'algèbre de Lie différentielles graduées $F : (\mathfrak{g}_*, d) \rightarrow (\mathfrak{g}'_*, d')$ est un morphisme de complexes de chaînes tel que $F([x, y]) = [F(x), F(y)]$ pour $x \in \mathfrak{g}_p$ et $y \in \mathfrak{g}_q$.

On a donc défini la catégorie $\text{Lie}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$

On a défini les principales catégories qui vont nous servir. Etudions les relations entre elles. Cela va par exemple nous servir à montrer un équivalent du théorème 4.1.1 pour $\text{Lie}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$.

Déjà, on a des foncteurs "d'oubli" :

1. Un foncteur d'oubli $\text{Forget}_{\text{com}} : \text{CAlg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}} \rightarrow \text{Alg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$.
2. Des foncteurs d'oubli $\text{Forget}_{\text{Lie}}$, $\text{Forget}_{\text{Alg}}$ et $\text{Forget}_{\text{CAlg}}$ de toutes les catégories vers $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$.
3. Le produit d'une algèbre différentielle graduée définit un crochet de Lie donné par $[x, y] = xy + (-1)^{pq}yx$. Par conséquent, on a un foncteur d'oubli $\text{Forget}_{\text{Alg, Lie}} : \text{Alg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}} \rightarrow \text{Lie}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$.

Ils ont des adjoints. L'outil le plus important pour les décrire est l'algèbre tensorielle libre :

Définition 4.1.4. Si V est un objet de $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$, on définit $T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$. C'est aussi un objet de $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ étant donné que chaque $V^{\otimes n}$ est dans $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ (la différentielle sur le produit tensoriel est décrite dans la définition 4.1.1). De plus, \otimes définit un produit : $T(V)$ est dans $\text{Alg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$. Ceci définit le foncteur $T : \text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}} \rightarrow \text{Alg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$

Les adjoints qui nous intéressent sont :

1. Le foncteur T est un adjoint à gauche du foncteur "d'oubli" $\text{Forget}_{\text{Alg}} : \text{Alg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$.

2. L'algèbre enveloppante est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli $Forget_{Alg, Lie} : \mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}} \rightarrow \mathbf{Lie}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$. Si (\mathfrak{g}, d) est une algèbre de Lie différentielle graduée, soit $I(\mathfrak{g})$ l'idéal bilatère de $T(\mathfrak{g})$ généré par les expressions de la forme $x \otimes y - (-1)^{pq} y \otimes x - [x, y]$ ($x \in \mathfrak{g}_p$ et $y \in \mathfrak{g}_q$). On a :

- a) l'égalité $I(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} I(\mathfrak{g}) \cap T(\mathfrak{g})_p$
- b) l'idéal $I(\mathfrak{g})$ est stable par la différentielle.

Dès lors, $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g})$ a une structure canonique d'algèbre différentielle graduée. On a ainsi construit le foncteur $U : \mathbf{Lie}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}} \rightarrow \mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$.

3. Le foncteur "Algèbre de Lie libre" $Free : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}} \rightarrow \mathbf{Lie}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ est un adjoint à gauche du foncteur "d'oubli" $Forget_{Lie}$. Pour le construire à partir d'un complexe de chaîne V , il suffit de considérer $T(V)$ comme une algèbre de Lie (le crochet de Lie dérive du produit) et de prendre la plus petite sous-algèbre de Lie de $T(V)$ qui contient V .

4. Enfin, décrivons un adjoint à gauche du foncteur d'oubli $\mathbf{CAlg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}} \rightarrow \mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$: si A est une algèbre différentielle graduée, alors on note $J(A)$ l'idéal bilatère de A généré par les expressions de la forme $x \otimes y - (-1)^{pq} y \otimes x$ ($x \in A_p$ et $y \in A_q$). Comme

- a) on a $J(A) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} J(A) \cap A_p$
- b) l'idéal $J(A)$ est stable par la différentielle

alors $Sym(A) = A/J(A)$ est une algèbre commutative différentielle graduée.

Le foncteur U est un des plus importants de notre étude. Décrivons-le de manière plus précise. Pour cela, on introduit "l'algèbre graduée" associée à une filtration.

Définition 4.1.5. Si \mathfrak{g} est un objet de $\mathbf{Lie}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$, alors $U(\mathfrak{g})$ est filtrée par :

$$k = U(\mathfrak{g})^{\leq 0} \subseteq U(\mathfrak{g})^{\leq 1} \subseteq \dots \quad (4.1)$$

où $U(\mathfrak{g})^{\leq n}$ est l'image de $\bigoplus_{0 \leq m \leq n} \mathfrak{g}^{\otimes m}$ dans $U(\mathfrak{g})$ au moyen de la projection $T(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ (remarquons que cette filtration provient d'une graduation positive). On définit l'espace vectoriel gradué associé à cette filtration :

$$gr(U(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{n \geq 0} gr^n(U(\mathfrak{g})) \quad (4.2)$$

où

$$gr^n(U(\mathfrak{g})) = U(\mathfrak{g})^{\leq n} / U(\mathfrak{g})^{\leq n-1} \quad (4.3)$$

De plus, quand on parlait d'espace vectoriel "gradué" à propos de $gr(U(\mathfrak{g}))$, on se référait à la graduation positive (de $T(\mathfrak{g})$) d'où provient la filtration. Cependant, $U(\mathfrak{g})$ est aussi graduée au moyen de la graduation de \mathfrak{g} , mais cette fois avec une différentielle. On peut vérifier que, avec cette dernière graduation (et différentielle), et avec le produit tensoriel, $gr(U(\mathfrak{g}))$ hérite d'une structure d'algèbre commutative différentielle graduée. La commutativité vient du fait que, si $x \in \mathfrak{g}$ et $y \in \mathfrak{g}_q$, alors $x \otimes y + (-1)^{pq} y \otimes x = [x, y]$ dans $U(\mathfrak{g})^{\leq 2} \subseteq U(\mathfrak{g})$; or $[x, y] \in U(\mathfrak{g})^{\leq 1}$, donc $x \otimes y + (-1)^{pq} y \otimes x = 0$ dans $gr^2(U(\mathfrak{g}))$.

Remarque 4.1.1. L'opérateur gr peut s'appliquer à toute algèbre associative (en particulier différentielle graduée) munie d'une filtration compatible avec la multiplication.

Remarque 4.1.2. Lorsque l'on utilise les opérateurs U ou T sur des éléments qui sont par définition déjà gradués, on obtient une nouvelle graduation (au moyen du produit). Il faut faire attention à la graduation utilisée. On parlera de graduation intérieure (indexée par \mathbb{Z}) et de graduation issue du produit (indexée par \mathbb{N}).

Lemme 4.1.1. Les projections canoniques $U(\mathfrak{g})^{\leq n} \rightarrow gr^n(U(\mathfrak{g}))$ induisent un isomorphisme $U(\mathfrak{g}) \rightarrow gr(U(\mathfrak{g}))$ dans $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$.

Remarque 4.1.3. C'est un isomorphisme de $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ mais il ne commute pas avec le produit (sinon $U(\mathfrak{g})$ serait commutative).

Les deux constructions précédentes sur \mathfrak{g} coïncident :

Proposition 4.1.1. *Si \mathfrak{g} est un objet de $\text{Lie}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$, alors la projection naturelle $T(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ induit un isomorphisme de $\text{CALg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}} : \theta : \text{Sym}(T(\mathfrak{g})) \rightarrow \text{gr}(U(\mathfrak{g}))$.*

Schéma de preuve : Cette projection induit des morphismes $\mathfrak{g}^{\otimes n} \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\leq n} \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\leq n} / U(\mathfrak{g})^{\leq n-1}$ de $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ notés ψ_n . Si σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$ (il y en a $n!$) et ϕ_σ l'automorphisme induit sur $\mathfrak{g}^{\otimes n}$, alors $\frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \psi_n \circ \phi_\sigma : \mathfrak{g}^{\otimes n} \rightarrow \text{gr}^n(U(\mathfrak{g})) = U(\mathfrak{g})^{\leq n} / U(\mathfrak{g})^{\leq n-1}$ est invariant par la pré-composition par chaque ϕ_σ . Cela induit un morphisme $\text{Sym}^n(T(\mathfrak{g})) \rightarrow \text{gr}^n(U(\mathfrak{g}))$ de $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ (où $\text{Sym}^n(T(\mathfrak{g}))$ est l'image de $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ par la projection $T(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{Sym}(T(\mathfrak{g}))$). Ce dernier morphisme est un isomorphisme d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt que nous rappelons dans la suite. \square

Théorème 4.1.2 (Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt). *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie (différentielle graduée ou non), $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, et B une base de \mathfrak{g} qui est totalement ordonnée. Tous les produits finis possibles $b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_r}$ d'éléments de B où $i_1 \leq \dots \leq i_r$ forment une base de $U(\mathfrak{g})$. Dès lors, le morphisme canonique $\mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ est une injection.*

Grâce aux résultats précédents, on obtient :

Corollaire 4.1.1. *On a un isomorphisme de $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ canonique : $\text{Sym}(T(\mathfrak{g})) \rightarrow U(\mathfrak{g})$.*

Remarque 4.1.4. On remarque que cette dernière application n'est pas un morphisme de $\text{Alg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ (elle n'est pas une sous-catégorie pleine de $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$).

Une conséquence importante est que le foncteur U conserve les quasi-isomorphismes.

Proposition 4.1.2. *Si $f : \mathfrak{g}_* \rightarrow \mathfrak{g}'_*$ est un morphisme d'algèbres de Lie différentielles graduées, alors f est un quasi-isomorphisme si et seulement si $U(f)$ en est un.*

Démonstration. Le morphisme $f : V \rightarrow W$ de $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si il induit un quasi-isomorphisme $\text{Sym}(T(V)) \rightarrow \text{Sym}(T(W))$. Le résultat se déduit du corollaire 4.1.1. \square

Ce dernier résultat est la clé de la preuve du théorème fondamental suivant.

Théorème 4.1.3 (DAG X, 2.1.10). *La catégorie $\text{Lie}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ a une structure de modèle (combinatoire) telle que les morphismes sont des équivalences faibles (resp. fibrations) si et seulement si ils le sont dans $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$.*

Remarque 4.1.5. C'est un théorème important prouvé dans [DAG X], originellement montré par Quillen.

Remarque 4.1.6. Le foncteur "d'oubli" $\text{Alg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}} \rightarrow \text{Lie}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ préserve les équivalences faibles et les fibrations et a un adjoint à gauche. Dès lors, c'est un foncteur de Quillen à droite, et donc U est un foncteur de Quillen à gauche. Donc U préserve les équivalences faibles et les cofibrations.

4.2 Théorie de la déformation des E_∞ -algèbres

4.2.1 Contexte de déformation :

En reprenant le formalisme introduit au chapitre précédent, on se place dans le contexte de déformation (Def, E) où Def est la ∞ -catégorie des E_∞ -algèbres augmentées sur \mathbb{K} . Nous décrirons E dans la suite.

Les E_∞ -algèbres paraissent être des objets très compliqués. Le théorème suivant les rend beaucoup plus simples dans le cadre de notre étude :

Théorème 4.2.1 (HA, 7.1.4.11). *Si \mathbb{K} est un corps de caractéristique 0, alors $\text{CALG}_{\mathbb{K}}$ la ∞ -catégorie des E_∞ -algèbres sur \mathbb{K} s'identifie au nerf cohérent de la localisation de Dwyer-Kan de la sous-catégorie pleine de $\text{CALg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ (munie de la structure de modèle décrite plus haut) des éléments cofibrants. Cela se résume par $\text{CALG}_{\mathbb{K}} \simeq N^{\text{coh}}(L^H((\text{CALg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}})^c, W))$.*

Nous prenons comme quasi-catégorie de déformation $\mathcal{D}ef = \mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug}$ où $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug} = (\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}})_{/\mathbb{K}}$. C'est une catégorie pointée (par \mathbb{K}). Les objets de $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}$ pouvant, par le théorème précédent, être considérés comme les objets de $(\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{dg})^c$, alors, les objets de $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug}$ peuvent être considérés comme des morphismes d'algèbre différentielles graduées $A \rightarrow \mathbb{K}$ tels que la pré-composition avec l'injection canonique $\mathbb{K} \rightarrow A$ donne l'identité de \mathbb{K} .

Remarque 4.2.1. Par la remarque 1.3.3.3 de [HA] et comme tous les objets de $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{dg}$ sont fibrants, la ∞ -catégorie $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}$ s'identifie également à $N^{coh}(L^H(\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{dg}, W))$, nerf cohérent de la localisation de Dwyer-Kan de $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{dg}$.

Par ailleurs, il existe un pré-spectre canonique de $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug}$ qui vaut $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n]$ au point (n, n) (souvenons-nous qu'un pré-spectre d'une ∞ -catégorie \mathcal{C} est un foncteur $N(Z \times Z) \rightarrow \mathcal{C}$). On note E ce pré-spectre. La proposition suivante nous assure que c'est un spectre.

Remarque 4.2.2. Chaque $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n]$ est un élément cofibrant de $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{dg}$.

Proposition 4.2.1. *Dans la quasi-catégorie pointée $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug}$, $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n-1]$ est un modèle explicite de $\Omega_{\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug}}(\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n])$*

Idée de la démonstration : On peut montrer que $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n-1]$ est le pullback homotopique dans $(\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{dg})^c$ de :

$$\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n] \leftarrow \mathbb{K}.$$

Pour cela il suffit factoriser $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n-1] \oplus \mathbb{K}[n] \rightarrow \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n]$, puis de prendre le pullback de $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n-1] \oplus \mathbb{K}[n] \rightarrow \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n] \leftarrow \mathbb{K}$ qui n'est autre que $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n-1]$. Dès lors, par le théorème 2.3.11, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n-1] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n] \end{array}$$

est un pullback de $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}$ ce qui induit un pullback de $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug}$. □

On se place donc dans le contexte de déformation $(\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug}, E)$.

4.2.2 Petits objets, problèmes de modules formels et complexe tangent

Les petits objets du contexte de déformation précédent sont décrits par la proposition suivante :

Proposition 4.2.2 (DAG X, 1.1.11). *Un objet $A \rightarrow \mathbb{K}$ de $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug}$ est petit si :*

1. le $n^{\text{ème}}$ groupe d'homologie $H_n(A)$ est nul pour $n < 0$.
2. l'espace vectoriel $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(A)$ est de dimension finie.
3. l'algèbre commutative $H_0(A)$ est un anneau local, et si on note \mathfrak{M} son idéal maximal, alors l'application canonique $\mathbb{K} \rightarrow H_0(A)/\mathfrak{M}$ est un isomorphisme de corps.

Dès lors, on note $(\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug})^{sm}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug}$ qui contient les petits objets.

Toujours dans le même contexte, un problème formel de modules est un foncteur $F : (\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug})^{sm} \rightarrow \mathcal{S}$ tel que :

1. l'espace $F(0)$ est contractile, c'est-à-dire que tous ses groupes d'homotopie $\pi_n(F(0))$ sont triviaux.
2. pour tout pullback σ de $(\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug})^{sm}$:

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_1 & \longrightarrow & R_{01} \end{array}$$

tel que les applications induites $H_0(R_0) \rightarrow H_0(R_{01}) \leftarrow H_0(R_1)$ sont surjectives, alors le diagramme $F(\sigma)$ est un pullback.

On définit la ∞ -catégorie $\mathcal{M}oduli$ comme la sous-catégorie pleine de $Fun((\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug})^{sm}, \mathcal{S})$ engendrée par les problèmes de modules formels.

Enfin, le complexe tangent d'un problème de modules formel F tel que l'on vient de le définir est la donnée de l'image du spectre E par F , c'est-à-dire $(F(\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n]))_{n \geq 0}$. C'est bien la donnée d'un spectre de \mathcal{S}_* d'après l'étude du complexe tangent en général menée au chapitre précédent.

4.2.3 Foncteur de déformation

Dans notre contexte, une théorie de la déformation ou foncteur de déformation est un foncteur $\mathfrak{D} : (\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug})^{op} \rightarrow \mathcal{E}$ entre ∞ -catégories pointées, et tel que :

D1 La ∞ -catégorie \mathcal{E} est présentable.

D2 \mathfrak{D} a un adjoint à gauche \mathfrak{D}' .

D3 Il y a une sous-catégorie pleine \mathcal{E}^0 de \mathcal{E} telle que :

- a) Pour tout objet X de \mathcal{E}^0 , l'application canonique (1-simplexe dans \mathcal{E}^0) $X \rightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{D}'X$ est une équivalence (c'est-à-dire un isomorphisme dans la catégorie homotopique).
- b) si 0 est un objet zéro de \mathcal{E} , alors il est dans \mathcal{E}^0 .
- c) Pour tout $n > 0$, il existe $X_n \in \mathcal{E}^0$ tel que $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n] \simeq \mathfrak{D}'X_n$ (\simeq correspond à équivalent)
- d) Pour tout pushout dans \mathcal{E} :

$$\begin{array}{ccc} X_n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X' \end{array}$$

si X est dans \mathcal{E}^0 , alors c'est aussi le cas de X' .

D4 Le foncteur $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{SP}(\mathcal{S}_*)$ donné sur X par l'évaluation sur le spectre $E = (\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n])_{n \geq 0}$ de $Map_{\mathcal{E}}(\mathfrak{D}(\cdot), X)$ préserve les petite colimites filtrées et est conservatif (cela veut dire qu'un morphisme est une équivalence si et seulement si son image est une équivalence).

Comme attendu, les problèmes formels de modules sont liés au algèbres de Lie différentielles graduées.

Définition 4.2.1. On note $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}$ la ∞ -catégorie obtenue par application du nerf cohérent sur la localisation de Dwyer-Kan de la catégorie modèle $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg}$.

Remarque 4.2.3. Lurie définit d'abord $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}$ comme le nerf cohérent de la localisation de Dwyer-Kan de $(\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg})^c$ (sous-catégorie pleine de $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg}$ des objets cofibrants). Par la remarque 1.3.3.3 de [HA], on sait que cela revient au même.

Le reste de notre travail va consister à montrer le théorème suivant.

Théorème 4.2.2. *Il existe une théorie de la déformation $\mathfrak{D} : (\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug})^{op} \rightarrow \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}$. Dès lors, le foncteur :*

$$\theta : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{M} \tag{4.4}$$

$$\mathfrak{g} \mapsto (A \mapsto Map_{\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}}(\mathfrak{D}(A), \mathfrak{g})) \tag{4.5}$$

induit une équivalence de ∞ -catégories.

Remarque 4.2.4. Le foncteur de l'axiome (D4) est exactement $\mathfrak{g} \mapsto (\theta(\mathfrak{g})(\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n]))_{n \geq 0}$.

Remarque 4.2.5. Le bifoncteur $(A, \mathfrak{g}) \mapsto \theta(\mathfrak{g})(A)$ correspond à l'espace de modules de Maurer-Cartan $(A, \mathfrak{g}) \mapsto MC(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{M}_A)$ si A est une algèbre artinienne [HIN].

4.3 Complexes de Chevalley-Eilenberg

Plutôt que de construire directement une théorie de la déformation $\mathfrak{D} : (\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug})^{op} \rightarrow \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}$, on construit un foncteur $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \rightarrow (\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug})^{op}$ dont la théorie de la déformation sera l'adjoint à droite. Pour ce faire, on commence par former un foncteur sur les catégories de modèle $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg} \rightarrow \mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{dg}$ qui préserve les équivalences faibles.

4.3.1 Complexes de Chevalley-Eilenberg sur les catégories de modèles

Définition 4.3.1. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie différentielle graduée. On définit $Cn(\mathfrak{g})$ le cône de \mathfrak{g} comme l'algèbre de Lie différentielle graduée qui vérifie :

1. On a $Cn(\mathfrak{g})_p = \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{g}_{p-1}$. Un élément de $Cn(\mathfrak{g})_p$ est noté $x + \epsilon y$, où $x \in \mathfrak{g}_p$ et $y \in \mathfrak{g}_{p-1}$.
2. La différentielle est définie par : $d(x + \epsilon y) = dx + y - \epsilon dy$
3. Le crochet de Lie est : $[x + \epsilon y, x' + \epsilon y'] = [x, x'] + \epsilon([y, x'] + (-1)^p[x, y'])$. Le crochet de Lie dans le membre de droite de l'équation est bien évidemment celui de \mathfrak{g}

Ceci induit un foncteur $Cn : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg} \rightarrow \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg}$

On peut penser à \mathbb{K} comme à une algèbre (commutative) différentielle graduée (c.f. l'exemple 4.1.1). Dans ce cadre :

1. L'injection canonique $\mathfrak{g} \rightarrow Cn(\mathfrak{g})$ induit un morphisme $U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(Cn(\mathfrak{g}))$ de $\mathcal{ALG}_{\mathbb{K}}^{dg}$ par le foncteur U .
2. l'application $\mathfrak{g} \rightarrow 0$ induit $U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{K} = U(0)$

En d'autres termes, \mathbb{K} et $U(Cn(\mathfrak{g}))$ ont une structure de $U(\mathfrak{g})$ -algèbres. Dès lors :

Définition 4.3.2. Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie différentielle graduée, alors on définit les espaces vectoriels différentiels gradués :

1. Le complexe homologique de Chevalley-Eilenberg $C_*(\mathfrak{g}) = U(Cn(\mathfrak{g})) \otimes_{U(\mathfrak{g})} \mathbb{K}$, c'est-à-dire le pushout dans $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg}$ du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & U(Cn(\mathfrak{g})) \\ \downarrow & & \\ \mathbb{K} & & \end{array}$$

2. Le complexe cohomologique de Chevalley-Eilenberg $C^*(\mathfrak{g}) = C_*(\mathfrak{g})^{\vee}$.

On a donc défini les foncteurs $C_* : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg} \rightarrow \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg}$ et $C^* : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg} \rightarrow (\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg})^{op}$

La structure vectorielle de $C_*(\mathfrak{g})$ paraît très complexe. Heureusement le théorème suivant nous donne un angle d'approche plus simple.

Théorème 4.3.1. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués (par la graduation intérieure) $\phi : \mathcal{S}ym(T(\mathfrak{g}[1])) \rightarrow C_*(\mathfrak{g})$.

Démonstration. On a un morphisme canonique $\mathfrak{g}[1] \rightarrow Cn(\mathfrak{g})$ d'espaces vectoriels gradués (sans différentielle) qui à $x \in \mathfrak{g}[1]_p$ associe $\epsilon x \in Cn(\mathfrak{g})_p$. Si on munit $\mathfrak{g}[1]$ du crochet de Lie trivial (c'est-à-dire nul), cette application devient un morphisme d'algèbres de Lie graduées (sans différentielle là encore). Celui-ci induit une fonction entre algèbres graduées $U(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow U(Cn(\mathfrak{g}))$. Or, comme le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}[1]$ est trivial, $U(\mathfrak{g}[1])$ s'identifie à $\mathcal{S}ym(T(\mathfrak{g}[1]))$. On a donc un morphisme d'algèbres graduées $\mathcal{S}ym(T(\mathfrak{g}[1])) \rightarrow U(Cn(\mathfrak{g}))$, qui donne un morphisme de $U(\mathfrak{g})$ -modules à droite et gradués :

$$\mathcal{S}ym(T(\mathfrak{g}[1])) \otimes_{\mathbb{K}} U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(Cn(\mathfrak{g})) \quad (4.6)$$

Par une application du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, c'est un isomorphisme. D'où, un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués :

$$\mathcal{S}ym(T(\mathfrak{g}[1])) \simeq (\mathcal{S}ym(T(\mathfrak{g}[1])) \otimes_{\mathbb{K}} U(\mathfrak{g})) \otimes_{U(\mathfrak{g})} \mathbb{K} \rightarrow U(Cn(\mathfrak{g})) \otimes_{U(\mathfrak{g})} \mathbb{K} = C_*(\mathfrak{g}). \quad (4.7)$$

□

Remarque 4.3.1. Notons qu'un élément de la forme $\epsilon x \otimes y$ (où x et y sont des éléments homogènes de \mathfrak{g}) dans $U(Cn(\mathfrak{g}))$ s'annule dans $C_*(\mathfrak{g})$.

Remarquons que l'isomorphisme ϕ du théorème précédent est une application entre espaces vectoriels gradués et non un morphisme de $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$. La différentielle sur $C_*(\mathfrak{g})$ induit sur $Sym(T(\mathfrak{g}[1]))$ l'application D définie par :

$$D(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{p_1 + \dots + p_{i-1}} x_1 \dots x_{i-1} dx_i x_{i+1} \dots x_n + \quad (4.8)$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{p_i(p_{i+1} + \dots + p_{j-1})} x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{j-1} [x_i, x_j] x_{j+1} \dots x_n \quad (4.9)$$

pour $x_i \in \mathfrak{g}[1]_{p_i}$ et d la différentielle de $\mathfrak{g}[1]$ (c'est-à-dire $-d_{\mathfrak{g}}$).

L'isomorphisme $\phi : Sym(T(\mathfrak{g}[1])) \rightarrow C_*(\mathfrak{g})$ induit une filtration :

$$\mathbb{K} \simeq C_*^{\leq 0}(\mathfrak{g}) \subseteq C_*^{\leq 1}(\mathfrak{g}) \subseteq \dots \quad (4.10)$$

où $C_*^{\leq n}(\mathfrak{g}) = \phi(Sym^{\leq n}(T(\mathfrak{g}[1])))$ où $Sym^{\leq n}(T(\mathfrak{g}[1])) = \bigoplus_{i \leq n} Sym^i(T(\mathfrak{g}[1]))$ (où $Sym^n(T(\mathfrak{g}[1]))$ est l'image de $\mathfrak{g}[1]^{\otimes n}$ par la projection $T(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow Sym(T(\mathfrak{g}[1]))$). Alors, ϕ donne des isomorphismes dans $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$:

$$gr^n(C_*(\mathfrak{g})) = C_*^{\leq n}(\mathfrak{g}) / C_*^{\leq n-1}(\mathfrak{g}) \simeq Sym^n(T(\mathfrak{g}[1])) \quad (4.11)$$

Remarque 4.3.2. Pour vérifier que ce sont bien des isomorphismes d'espaces vectoriels différentiels gradués et pas seulement des isomorphismes d'espaces vectoriels gradués, on peut utiliser la formule de la différentielle précédente.

Ces isomorphismes nous permettent de montrer la proposition importante qui suit :

Proposition 4.3.1. *Le foncteur C_* préserve les équivalences faibles (quasi-isomorphismes).*

Démonstration. Soit $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ une équivalence faible dans $\mathbf{Lie}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$. Elle induit des applications dans $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ $f_n : C_*^{\leq n}(\mathfrak{g}) \rightarrow C_*^{\leq n}(\mathfrak{g}')$. Déjà, $f_0 : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ est trivialement un quasi-isomorphisme. On suppose que pour un certain $n \geq 1$, $f_{n-1} : C_*^{\leq n-1}(\mathfrak{g}) \rightarrow C_*^{\leq n-1}(\mathfrak{g}')$ est une équivalence faible. Alors, on dispose du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*^{\leq n-1}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & C_*^{\leq n-1}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & Sym^n(T(\mathfrak{g}[1])) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_*^{\leq n-1}(\mathfrak{g}') & \longrightarrow & C_*^{\leq n-1}(\mathfrak{g}') & \longrightarrow & Sym^n(T(\mathfrak{g}'[1])) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes et où les quatre flèches verticales sur les côtés sont des quasi-isomorphismes. Par le lemme des cinq appliqué sur les groupes d'homologie, la flèche verticale du milieu est un quasi-isomorphisme. Le résultat se montre alors par récurrence. \square

Corollaire 4.3.1. *Le foncteur C^* préserve les équivalences faibles (quasi-isomorphismes).*

Démonstration. De manière générale, le foncteur $(\cdot)^\vee : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}} \rightarrow (\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}})^{\text{op}}$ préserve les quasi-isomorphismes. \square

De la même façon que l'on peut mettre le cup produit sur la cohomologie, on peut mettre une structure d'algèbre commutative sur les images du foncteur C^* :

Proposition 4.3.2. *Il y a une multiplication définie sur $C^*(\mathfrak{g})$, qui envoie $\lambda \in C^*(\mathfrak{g})_p$ and $\mu \in C^*(\mathfrak{g})_q$ sur l'élément $\lambda\mu \in C^*(\mathfrak{g})_{p+q}$ donné par la formule issue de l'analogie entre $C^*(\mathfrak{g})$ et $Sym(T(\mathfrak{g}[1]))$:*

$$(\lambda\mu)(x_1 \dots x_n) = \sum_{S, S'} \epsilon(S, S') \lambda(x_{i_1} \dots x_{i_m}) \mu(x_{j_1} \dots x_{j_{n-m}}) \quad (4.12)$$

où $x_i \in \mathfrak{g}[1]_{r_i}$ sachant que $r_1 + \dots + r_n = p + q$. La somme est prise sur l'ensemble des couples $S = \{i_1 < \dots < i_m\}$, $S' = \{j_1 < \dots < j_{n-m}\}$ d'ensembles disjoints et d'union $\{1, \dots, n\}$ tels que $r_{i_1} + \dots + r_{i_m} = p$. Enfin $\epsilon(S, S') = \prod_{i \in S, j \in S', i < j} (-1)^{r_i r_j}$.

Le produit donne à $C^*(\mathfrak{g})$ une structure d'algèbre commutative différentielle graduée; l'unité pour cette structure est l'application $C_*(\mathfrak{g})_0 = \text{Sym}(T(\mathfrak{g}[1]))_0 \rightarrow \mathbb{K}$ qui est l'identité sur $\mathbb{K} \simeq \mathfrak{g}[1]^{\otimes 0}$ et qui est nulle sur l'image de $(\oplus_{n>0} \mathfrak{g}[1]^n)_0$ par la projection canonique $T(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \text{Sym}(T(\mathfrak{g}[1]))$. Alors, C^* est un foncteur $\text{Lie}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}} \rightarrow (\text{CAlg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}})^{\text{op}}$. De plus, on a vu qu'il préservait les quasi-isomorphismes.

Si l'algèbre de Lie différentielle graduée est libre (c'est-à-dire dans l'image du foncteur *Free*) alors l'homologie des ses complexes de Chevalley-Eilenberg est simple à calculer. En effet :

Proposition 4.3.3 (DAG X, 2.2.7). *Si V est un objet de $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ et $\mathfrak{g} = \text{Free}(V)$, alors l'application $\mathbb{K} \oplus V[1] \rightarrow \mathbb{K} \oplus \mathfrak{g}[1] \simeq C_*^{\leq 1}(\mathfrak{g}) \subseteq C_*(\mathfrak{g})$ est un quasi-isomorphisme entre complexes de chaînes.*

Corollaire 4.3.2. *Si $\mathfrak{g} = \text{Free}(V)$, l'application induite par la propriété précédente :*

$$C^*(\mathfrak{g}) = C_*(\mathfrak{g})^{\vee} \rightarrow (\mathbb{K} \oplus V[1])^{\vee} \simeq \mathbb{K} \oplus V^{\vee}[-1] \quad (4.13)$$

est une équivalence faible de $\text{CAlg}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ si l'on regarde $\mathbb{K} \oplus V^{\vee}[-1]$ comme une extension *square-zero* de \mathbb{K} .

Démonstration. Le foncteur $(\cdot)^{\vee}$ préserve les quasi-isomorphismes. Il suffit donc de montrer que $C^*(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{K} \oplus V^{\vee}[-1]$ est bien un morphisme d'algèbres lorsque $\mathbb{K} \oplus V^{\vee}[-1]$ est munie de la structure d'extension *square-zero* de \mathbb{K} . Soit $\lambda \in C^p(\mathfrak{g})$ et $\mu \in C^q(\mathfrak{g})$.

1. si $p \neq 0$ et $q \neq 0$, alors pour tout $x \in (\mathbb{K} \oplus V[1])_{p+q}$, d'après la formule de multiplication $(\lambda\mu)(x) = \sum_{\emptyset} = 0$. Donc le produit $\lambda\mu$ est d'image nul par $C^*(\mathfrak{g}) \rightarrow (\mathbb{K} \oplus V[1])^{\vee}$.
2. si $p = 0$, alors pour tout $x \in (\mathbb{K} \oplus V[1])_{0+q}$, d'après la formule de multiplication $(\lambda\mu)(x) = \lambda(1)\mu(x)$.
3. si $q = 0$, alors pour tout $x \in (\mathbb{K} \oplus V[1])_{p+0}$, d'après la formule de multiplication $(\lambda\mu)(x) = \lambda(x)\mu(1)$.

Cela se résume par la formule, pour f et g deux éléments non forcément homogènes de $C^*(\mathfrak{g})$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in V[1]$:

$$(fg)(\alpha.1 + x) = \alpha f(1)g(1) + f(1)g(x) + g(1)f(x) \quad (4.14)$$

ce qui correspond exactement à la multiplication de $\mathbb{K} \oplus V^{\vee}[-1]$ vu comme une extension *square-zero* de \mathbb{K} . \square

4.3.2 Complexes de Chevalley-Eilenberg sur les ∞ -catégories induites

Définition 4.3.3. On définit la ∞ -catégorie $\text{Mod}_{\mathbb{K}}$ comme la localisation de Dwyer-Kan de la catégorie $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$.

Remarque 4.3.3. D'après la remarque 2.1.15 de [DAG X], $\text{Mod}_{\mathbb{K}}$ est la ∞ -catégorie des \mathbb{K} -modules de la ∞ -catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{SP}(\mathcal{S}_*)$.

Les foncteurs "d'oubli", U , C_* , C^* , *Free*, *Sym* et $(\cdot)^{\vee}$ préservent les équivalences faibles et donc induisent des foncteurs entre les nerf cohérents des localisations de Dwyer-Kan. On utilise les mêmes notations pour ces nouveaux foncteurs.

Proposition 4.3.4. *La ∞ -catégorie $\text{Lie}_{\mathbb{K}}$ est présentable.*

Démonstration. Il suffit de voir que $\text{Lie}_{\mathbb{K}}^{\text{dg}}$ est une catégorie de modèle combinatoire et de conclure grâce à la proposition 2.3.14. \square

Proposition 4.3.5 (DAG X). *Le foncteur "d'oubli" $\text{Lie}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Mod}_{\mathbb{K}}$ préserve les petites colimites filtrées.*

Nous admettrons cette dernière propriété qui provient du lemme suivant au niveau des catégories de modèles.

Lemme 4.3.1. *Soit I une petite catégorie telle que $N(I)$ est filtré. Alors le foncteur "d'oubli" $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg} \rightarrow \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg}$ préserve les colimites homotopiques indexées par I .*

Démonstration. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt induit une injection canonique $\mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ (morphisme de $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg}$) pour toute algèbre de Lie différentielle graduée. On a également une projection $U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g}$ qui se compose avec l'injection précédente pour donner l'identité de \mathfrak{g} . Dans ces conditions, le foncteur "d'oubli" $Forget_{Lie} : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg} \rightarrow \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg}$ est un rétracte de la composition du foncteur $U : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg} \rightarrow \mathcal{A}lg_{\mathbb{K}}^{dg}$ et du foncteur "d'oubli" $Forget_{Alg} : \mathcal{A}lg_{\mathbb{K}}^{dg} \rightarrow \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg}$.

Dès lors, si $Forget_{Alg} \circ U$ préserve les colimites homotopiques indexées par I , alors $Forget_{Lie} : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg} \rightarrow \mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg}$ les préserve également. En effet, supposons que $Forget_{Alg} \circ U$ préserve les colimites homotopiques indexées par I . Les foncteurs $Forget_{Alg} \circ U$ et $Forget_{Lie}$ en induisent de nouveau allant de $(\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg})^I[(W^I)^{-1}]$ vers $(\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg})^I[(W^I)^{-1}]$ (où W symbolise les équivalences faibles ; on reprend ici le type de notations utilisée pour définir les limites homotopiques au deuxième chapitre) que nous dénoterons par les mêmes symboles ; si B est un élément de $(\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg})^I[(W^I)^{-1}]$ alors, la donnée de la précédente rétractation en induit une nouvelle :

$$Forget_{Lie}(B) \rightarrow Forget_{Alg}(U(B)) \rightarrow Forget_{Lie}(B) \quad (4.15)$$

qui donne, pour tout élément A de $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg}[W^{-1}]$, sachant que c est le foncteur constant $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg}[W^{-1}] \rightarrow (\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg})^I[(W^I)^{-1}]$, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} hom_{(\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg})^I[(W^I)^{-1}]}(Forget_{Lie}(B), c(A)) & \longrightarrow & hom_{\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg}[W^{-1}]}(Forget_{Lie}(hocolim(B)), A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ hom_{(\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg})^I[(W^I)^{-1}]}(Forget_{Alg}(U(B)), c(A)) & \longrightarrow & hom_{\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg}[W^{-1}]}(Forget_{Alg}(U(hocolim(B))), A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ hom_{(\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg})^I[(W^I)^{-1}]}(Forget_{Lie}(B), c(A)) & \longrightarrow & hom_{\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg}[W^{-1}]}(Forget_{Lie}(hocolim(B)), A) \end{array}$$

dont les colonnes sont des rétractions. Comme la flèche horizontale centrale est un isomorphisme, il est facile de voir que c'est aussi le cas des flèches horizontales en haut et en bas qui sont les mêmes. Dès lors, $Forget_{Lie}(hocolim(B))$ s'apparente à $hocolim(Forget_{Lie}(B))$.

Il s'agit donc de montrer que $Forget_{Alg} \circ U$ préserve les colimites indexées par I . C'est le cas de U qui est un foncteur de Quillen à gauche d'après une remarque précédente. Pour $Forget_{Alg}$, on se réfère au lemme 4.1.4.13 de *Higher Algebra* de Lurie. \square

Par ailleurs, $C_* : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{M}od_{\mathbb{K}}$ envoie l'objet zéro 0 de $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}$ sur \mathbb{K} et donc induit un foncteur $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \rightarrow (\mathcal{M}od_{\mathbb{K}})_{\mathbb{K}/}$. On le note également C_* .

Proposition 4.3.6. *Le foncteur $C_* : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \rightarrow (\mathcal{M}od_{\mathbb{K}})_{\mathbb{K}/}$ préserve les colimites petites.*

La preuve exposée par Lurie dans [DAG X] met en oeuvre beaucoup de techniques. Nous ne donnons ici qu'une vague idée de celle-ci.

Idée de la preuve. D'après le corollaire 4.2.3.11 de *Higher Topos Theory* et le lemme 1.3.2.9 de *Higher Algebra*, il suffit de montrer que C_* préserve les petite limites filtrées et les coproduits finis :

1. Pour les limites petites et filtrées, on utilise notamment la proposition précédente.
2. Pour les coproduits finis, on se ramène au cas des pushouts.

\square

De la même façon, le foncteur $C^* : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \rightarrow (\mathcal{C}ALG_{\mathbb{K}})^{op}$ envoie l'objet initial 0 sur \mathbb{K} . D'où, on obtient un foncteur $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \rightarrow ((\mathcal{C}ALG_{\mathbb{K}})^{op})_{\mathbb{K}/} = ((\mathcal{C}ALG_{\mathbb{K}})_{/\mathbb{K}})^{op} = (\mathcal{C}ALG_{\mathbb{K}}^{aug})^{op}$ que l'on dénote encore par C^* . Le théorème suivant nous permettra de construire un adjoint à C^* :

Théorème 4.3.2. *Le foncteur $C^* : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \rightarrow (\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug})^{op}$ préserve les petites colimites.*

Pour démontrer ce théorème, on introduit le lemme suivant :

Lemme 4.3.2 (HA, 3.2.2.5). *Si le foncteur $Forget \circ C^* : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \rightarrow (\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug})^{op} = ((\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}})^{op})_{\mathbb{K}/} \rightarrow (\text{Mod}_{\mathbb{K}}^{op})_{\mathbb{K}/}$ préserve les petites colimites, alors, il en est de même pour C^* .*

Démonstration du théorème 4.3.2. Le foncteur du dernier lemme est équivalent à $(\)^{\vee} \circ C_* : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \rightarrow (\text{Mod}_{\mathbb{K}})_{\mathbb{K}/} \rightarrow (\text{Mod}_{\mathbb{K}}^{pp})_{\mathbb{K}/}$. De plus :

1. C_* préserve les petites colimites comme on l'a vu.
2. $(\)^{\vee}$ préserve les petites colimites car le foncteur ordinaire $V \mapsto V^{\vee}$ envoie les colimites homotopiques sur les limites homotopiques de $\text{Vect}_{\mathbb{K}}^{dg}$.

□

4.4 Foncteur de dualité de Koszul

Comme le foncteur $C^* : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \rightarrow (\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug})^{op}$ préserve les petites colimites et comme $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}$ est présentable, dès lors, par le théorème du foncteur adjoint (théorème 2.3.5) et la remarque 5.5.2.9 de [HTT] (pour pallier au fait que l'on n'a pas prouvé que $\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug}$ était présentable), on obtient :

Théorème 4.4.1. *Le foncteur $C^* : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \rightarrow (\mathcal{CALG}_{\mathbb{K}}^{aug})^{op}$ a un adjoint à droite. On le note \mathfrak{D} . Il est appelé dualité de Koszul.*

Il ne nous reste plus qu'à montrer le théorème suivant.

Théorème 4.4.2. *Le foncteur \mathfrak{D} est une théorie de la déformation.*

On doit donc montrer que \mathfrak{D} vérifie les axiomes D1, D2, D3 et D4.

1. On a vu que $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}$ était présentable (D1).
2. Par construction, \mathfrak{D} possède un adjoint à gauche ; c'est simplement C^* (D2).

Pour D3, il s'agit de produire une sous-catégorie pleine $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^0$ de $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}$ qui vérifient les sous-axiomes de a, b, c et d.

Définition 4.4.1. Soit $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^0$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}$ générée par les algèbres de Lie différentielles graduées \mathfrak{g} telles que $\mathfrak{g} = \text{Free}(V)$ où V est un espace vectoriel gradué tel que :

1. Pour tout n , V_n est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie
2. Pour tout $n > 0$, $V_n = 0$

Remarque 4.4.1. Les algèbres de Lie différentielles graduées telles que décrites dans la définition précédente sont cofibrantes (pour la structure de modèle de $\text{Lie}_{\mathbb{K}}^{dg}$).

Remarque 4.4.2. Si \mathfrak{g} est telle que décrite plus haut, alors \mathfrak{g}_n est de dimension finie pour tout n , et $\mathfrak{g}_n = 0$ pour $n > 0$.

On va donc montrer la proposition relative au troisième axiome :

Proposition 4.4.1. *Les ∞ -catégories $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}$ et $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^0$ vérifient l'axiome D3.*

Le lemme suivant nous donne l'axiome a.

Lemme 4.4.1 (DAG X, 2.3.5). *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie différentielle graduée telle que :*

1. *Pour tout n , \mathfrak{g}_n est de dimension finie*
2. *Pour $n > 0$, $\mathfrak{g}_n = \{0\}$*

Alors le morphisme unitaire d'adjonction $u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{D}C^\mathfrak{g}$ est une équivalence de $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}$.*

On vérifie successivement les quatre sous-conditions de (D3) :

1. la propriété (a) se déduit du lemme et de la remarque précédents.
2. Bien évidemment, 0 est un objet de $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^0$.

3. Si $\mathfrak{g} = Free(V)$, on a un quasi-isomorphisme dans la catégorie ordinaire $\mathcal{C}Alg_{\mathbb{K}}^{dg} : C^*(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{K} \oplus V^\vee[-1]$. Par conséquent, on a une équivalence dans $\mathcal{C}ALG_{\mathbb{K}}^{aug} : C^*(Free(\mathbb{K}[-n-1])) \rightarrow \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n]$.
4. il s'agit de montrer que pour $n \leq 2$, et tout pushout de $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}$ de la forme :

$$\begin{array}{ccc} Free(\mathbb{K}[n]) & \xrightarrow{\alpha} & \mathfrak{g} \\ \beta \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g}' \end{array}$$

alors \mathfrak{g}' est dans $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^0$ si \mathfrak{g} est dans $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^0$. Supposons donc que \mathfrak{g} est dans $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^0$. Dès lors, comme $Free(\mathbb{K}[n])$ est cofibrant et \mathfrak{g} est fibrant (tous les objets le sont dans $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg}$), alors, on peut identifier α à un morphisme de $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg}$ ([DS, 5.11]). Il en est de même pour β . On peut alors construire un modèle explicite de \mathfrak{g}' comme la limite homotopique pour la catégorie de modèle $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg}$ du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Free(\mathbb{K}[n]) & \xrightarrow{\alpha} & \mathfrak{g} \\ \beta \downarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

Le morphisme $\beta : Free(\mathbb{K}[n]) \rightarrow 0$ se factorise par $Free(\mathbb{K}[n]) \rightarrow Free(\mathbb{K}[n] \oplus \mathbb{K}[n+1]) \rightarrow 0$. La flèche $Free(\mathbb{K}[n]) \rightarrow Free(\mathbb{K}[n] \oplus \mathbb{K}[n+1])$ est une cofibration d'après la démonstration de la proposition 2.1.10 de [DAG X] (c'est-à-dire la construction de la structure de modèle sur $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg}$) et $Free(\mathbb{K}[n] \oplus \mathbb{K}[n+1]) \rightarrow 0$ est une équivalence faible car $Free$ est un foncteur de Quillen à gauche et $\mathbb{K}[n] \oplus \mathbb{K}[n+1]$ a des groupes d'homologie nuls. Par le lemme *gluing* (version opposée du lemme *coguing*) un modèle explicite du pushout homotopique précédent (et donc du pushout dans la quasi-catégorie $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}$) est le pushout dans $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^{dg}$ du diagramme $Free(\mathbb{K}[n] \oplus \mathbb{K}[n+1]) \leftarrow Free(\mathbb{K}[n]) \rightarrow \mathfrak{g}$. On note \mathfrak{h} ce dernier pushout. Soit V un sous-espace vectoriel gradué \mathfrak{g} qui vérifie les conditions de la définition 4.4.1, et y un générateur de $(\mathbb{K}[n] \oplus \mathbb{K}[n+1])_{n+1}$. Si V' est le sous-espace vectoriel gradué de \mathfrak{h} généré par l'image de V et l'image de y alors $\mathfrak{h} = Free(V')$ et V' vérifie les conditions de la définition 4.4.1. Dès lors, on peut identifier \mathfrak{g}' à un objet de $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^0$.

Montrons la dernière condition D4 de manière informelle. On considère le foncteur :

$$\begin{aligned} e : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} &\rightarrow \mathcal{S}P(\mathcal{S}_*) \\ \mathfrak{g} &\mapsto (\theta(\mathfrak{g})(\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n]))_{n \geq 0} \end{aligned}$$

où $\theta : \mathfrak{g} \mapsto (A \mapsto Map_{\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}}(\mathfrak{D}(A), \mathfrak{g}))$ est le foncteur défini plus haut. Il s'agit de montrer que e préserve les colimites petites filtrées et est conservatif (si un morphisme a pour image une équivalence, alors, c'est une équivalence).

Or, on a vu que pour tout n , $C^*(Free(\mathbb{K}[-n-1]))$ est équivalent à $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n]$. De plus, l'application d'adjonction unitaire $Free(\mathbb{K}[-n-1]) \rightarrow \mathfrak{D}C^*Free(\mathbb{K}[-n-1])$ est une équivalence. Dès lors, $\mathfrak{D}(\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n])$ est équivalent à $Free(\mathbb{K}[-n-1])$. On a donc :

$$Map_{\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}}(\mathfrak{D}(\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n]), \mathfrak{g}) \simeq Map_{\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}}(Free(\mathbb{K}[-n-1]), \mathfrak{g}) \quad (4.16)$$

$$\simeq Map_{\mathcal{M}od_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K}[-n-1], \mathfrak{g}) \quad (4.17)$$

$$\simeq Map_{\mathcal{M}od_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K}[-n], \mathfrak{g}[1]) \quad (4.18)$$

où \simeq dénote une équivalence faible d'homotopie. La première équivalence vient du fait que $\mathfrak{D}(\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n])$ est équivalent à $Free(\mathbb{K}[-n-1])$ et que le plongement de Yoneda est pleinement fidèle (proposition 2.3.12), la deuxième du fait que $Free$ et le foncteur d'oubli $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{M}od_{\mathbb{K}}$ sont adjoints, et enfin la troisième du foncteur $[1] : \mathcal{M}od_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{M}od_{\mathbb{K}}$ (induit par l'automorphisme $V \mapsto V[1]$ de $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}^{dg}$) qui est une équivalence.

On admet que le foncteur :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}od_{\mathbb{K}} &\rightarrow \mathcal{SP}(\mathcal{S}_*) \\ V &\mapsto (Map_{\mathcal{M}od_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K}[-n], V))_{n \geq 0} \end{aligned}$$

s'identifie au foncteur "d'oubli" $\mathcal{M}od_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{SP}(\mathcal{S}_*)$. Dès lors, le foncteur e est équivalent au foncteur $Forget \circ [1] \circ Forget : \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{M}od_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{M}od_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{SP}$. Comme chaque foncteur de cette composition préserve les colimites petites filtrées et est conservatif, alors, c'est aussi le cas de e , qui donc vérifie bien l'axiome $D4$.

Conclusion : La donnée des ∞ -catégories $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}$ et $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}^0$ et du foncteur \mathfrak{D} décrit donc bien une théorie de la déformation. Dès lors, il existe une équivalence $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}} \simeq \mathcal{M}oduli$. De plus, à partir d'une algèbre de Lie différentielle graduée \mathfrak{g} , on peut construire le problème de modules formels correspondant ; c'est $Map_{\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}}(\mathfrak{D}(\cdot), \mathfrak{g})$. On peut également se poser le problème inverse : quelle est l'algèbre de Lie qui correspond à un problème de modules formel donné ?

Annexe A

Ensembles simpliciaux

A.1 Catégorie simpliciale

Définition A.1.1. La catégorie cosimpliciale Δ peut être décrite de la manière suivante :

1. Ses objets sont les ordinaux finis, c'est-à-dire contenus dans ω (le plus petit ordinal infini)
2. Ses morphismes sont les fonctions croissantes (pas forcément strictement ; par exemple les fonctions constantes sont admises)

On note $[n]$ l'ordinal $\{0, \dots, n\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [n]$, on introduit les morphismes :

1. $d_i : [n] \rightarrow [n+1]$ qui est l'injection (croissante) dont l'image est $[n+1] \setminus \{i\}$. d_i est appelée la $i^{\text{ème}}$ coface de $[n]$
2. $s_i : [n+1] \rightarrow [n]$ qui est la surjection (croissante) qui à $i+1$ associe i . C'est la $i^{\text{ème}}$ co-dégénérescence.

Il est facile de voir que les cofaces et les co-dégénérescences génèrent par composition tous les morphismes de la catégorie cosimpliciale. Pour décrire ceux-ci il ne suffit plus que de connaître les relations :

1. $d_j d_i = d_i d_{j-1}$ si $i < j$
2. $s_j d_j = id = s_j d_{j+1}$
3. $s_j d_i = d_{i-1} s_j$ si $i > j+1$
4. $s_j s_i = s_i s_{j+1}$ si $i \leq j$

A.2 Ensembles simpliciaux

Définition A.2.1. Soit \mathcal{C} une catégorie. Un objet simplicial dans \mathcal{C} est un foncteur :

$$\Delta^{op} \rightarrow \mathcal{C} \tag{A.1}$$

Ainsi un ensemble simplicial est un objet simplicial dans la catégorie des ensembles. Un morphisme d'ensembles simpliciaux est un morphisme de foncteurs. Ceci définit la catégorie \mathbf{sSet} des ensembles simpliciaux qui n'est autre que la catégorie des foncteurs de Δ^{op} dans \mathbf{Set} .

Un ensemble simplicial X est donc une suite d'ensembles X_0, X_1, \dots munie de morphismes $X(d_i)$ et $X(s_i)$ qui vérifient :

1. $X(d_i)X(d_j) = X(d_{j-1})X(d_i)$ si $i < j$
2. $X(d_j)X(s_j) = id = X(d_{j+1})X(s_j)$
3. $X(d_i)X(s_j) = X(s_j)X(d_{i-1})$ si $i > j+1$
4. $X(s_i)X(s_j) = X(s_{j+1})X(s_i)$ si $i \leq j$

Dans la suite, on note d_i au lieu de $X(d_i)$ et s_i au lieu de $X(s_i)$.

Définition A.2.2. Si X est un ensemble simplicial, Y un sous-ensemble simplicial de X est un ensemble simplicial muni d'un morphisme $Y \rightarrow X$ qui est injectif en chaque degré (monomorphisme).

Définition A.2.3. Le n -simplexe standard Δ^n est l'ensemble simplicial :

$$[m] \mapsto \text{Hom}_\Delta([m], [n]) \quad (\text{A.2})$$

Par le lemme de Yoneda, un élément de X_n , s'identifie à un morphisme $\Delta^n \rightarrow X$. On appelle donc un élément de X_n , un n -simplexe de X . Par ailleurs, la catégorie cosimpliciale est équivalente à la sous-catégorie pleine de \mathbf{sSet} des simplexes standards.

Définition A.2.4. Λ_i^n le $i^{\text{ème}}$ cornet de Δ^n où $i \in [n]$ est le sous ensemble simplicial de Δ^n défini par :

$$\forall m, (\Lambda_i^n)_m = \{f \in \text{Hom}_\Delta([m], [n]) \mid \{0, \dots, i-1, i+1, \dots, n\} \subsetneq f([m])\} \quad (\text{A.3})$$

Un élément f de $(\Lambda_i^n)_m$ est donc de la forme $f = d_j \circ g$ où $j \neq i$ et $g \in \text{Hom}_\Delta([m], [n-1])$. Le lemme suivant permet de décrire plus simplement les cornets :

Lemme A.2.1. Si X est un ensemble simplicial, un morphisme de Λ_i^n ($n > 0$) dans X (c'est à dire un morphisme de foncteurs) s'identifie à un n -uplet $(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ d'éléments de X_{n-1} tel que $d_k x_j = d_{j-1} x_k$ dès que cette relation fait sens.

Voici un autre sous ensemble de Δ^n :

Définition A.2.5. $\delta\Delta^n$ appelé la frontière de Δ^n est le sous ensemble simplicial de Δ^n des fonctions dans $[n]$ qui ne sont pas surjectives. En d'autres termes :

$$(\delta\Delta^n)_m = \{f \in \text{Hom}_\Delta([m], [n]) \mid [n] \not\subset f([m])\} \quad (\text{A.4})$$

A.3 Homotopie

Définition A.3.1. Un complexe de Kan K est un ensemble simplicial tel que $\forall n \geq 1, \forall i \in [n]$, tout morphisme $\phi : \Lambda_i^n \rightarrow K$ s'étend en un morphisme $\Delta^n \rightarrow K$:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \xrightarrow{\quad} & \Delta^n \\ & \searrow \phi & \swarrow \\ & & K \end{array}$$

La définition suivante décrit l'homotopie des ensembles simpliciaux :

Définition A.3.2. Soit f et g deux morphismes entre ensembles simpliciaux $X \rightarrow Y$. On dit que f est homotope à g s'il existe un morphisme $h : X \times \Delta^1 \rightarrow Y$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \times \Delta^0 \simeq X & & \\ \text{id} \times d_0 \downarrow & \searrow f & \\ X \times \Delta^1 & \xrightarrow{h} & Y \\ \text{id} \times d_1 \uparrow & \swarrow g & \\ X \times \Delta^0 \simeq X & & \end{array}$$

Par ailleurs, si U est un sous ensemble simplicial de X sur lequel f et g coïncide, alors on dit que f est homotope à g relativement à U si on peut trouver h vérifiant le diagramme commutatif précédent, ainsi que celui ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} X \times \Delta^1 & \xrightarrow{h} & K \\ \uparrow & & \uparrow \alpha \\ U \times \Delta^1 & \xrightarrow{pr_U} & U \end{array}$$

où α est la restriction de f et g à U .

Ce concept d'homotopie s'inspire bien évidemment de l'homotopie des espaces topologiques. Le problème est que ce n'est pas en général une relation d'équivalence.

Exemple A.3.1. En reprenant les notations de la définition précédente, si $i_0, i_1 : \Delta^0 \rightarrow \Delta^1$ sont les deux morphismes entre Δ^0 et Δ^1 ($i_0((\Delta^0)_0)(0) = 0$ et $i_1((\Delta^0)_0)(0) = 1$), alors i_0 est homotope à i_1 mais i_1 n'est pas homotope à i_0 .

La relation d'homotopie n'est donc pas une relation d'équivalence car elle n'est pas symétrique. On se place donc dans le cadre plus restreint décrit plus haut :

Théorème A.3.1 (GJ, I,6.2). *En reprenant les notations de la définition précédente, si Y est un complexe de Kan, la relation d'homotopie (resp. d'homotopie relativement à U) sur les morphismes $X \rightarrow Y$ (resp. les morphisme qui se restreignent en α sur U) est une relation d'équivalence.*

On peut alors définir les groupes d'homotopie d'un complexe de Kan.

Définition A.3.3. Soit K un complexe de Kan.

1. Les composantes connexes par arc de K sont les classes d'équivalence d'homotopie des morphismes $\Delta^0 \rightarrow K$. On l'appelle parfois abusivement $0^{\text{ème}}$ groupe d'homotopie de K (alors que ce n'est en général pas un groupe). On le note $\pi_0 K$.
2. Soit $v \in K_0$. Pour tout $n \geq 1$, le $n^{\text{ème}}$ groupe d'homotopie de K par rapport à v est l'ensemble des classes d'équivalences des morphismes $\Delta^n \rightarrow K$ par la relation d'homotopie relative à $\delta\Delta^n$ et au morphisme $\delta\Delta^n \rightarrow \Delta^0 \rightarrow K$, où la deuxième flèche correspond à v . On le note $\pi_n(K, v)$.

Pour que les appellations soient cohérentes, il faut que les groupes d'homotopie supérieurs ($n \geq 1$) soient effectivement des groupes.

Si $n \geq 1$ et ϕ est un morphisme $\Delta^n \rightarrow K$ qui vaut v sur la frontière $\delta\Delta^n$, alors on note $[\phi]$ sa classe d'homotopie (rel. $\delta\Delta^n$). Alors, soit ϕ et ψ deux tels morphismes. Il s'identifie à deux éléments de K_n . Alors si on note :

1. $v_k = v, 0 \leq k \leq n - 2$ dans le sens $v : \Delta^n \rightarrow \Delta^0 \rightarrow K$ où deuxième flèche s'identifie à v .
2. $v_{n-1} = \phi$
3. $v_{n+1} = \psi$

On peut vérifier le fait que la relation $d_i v_j = d_{j-1} v_i$ est valable lorsqu'elle fait sens. On a donc défini un morphisme de Λ_n^{n+1} vers K . Comme K est un complexe de Kan, ce morphisme s'étend en un morphisme de Δ^{n+1} vers K , c'est-à-dire un élément de K_{n+1} que l'on note w . Par ailleurs :

1. $\forall i \in \{0, \dots, n - 2\}, d_i d_n w = v$
2. $d_{n-1} d_n w = d_{n-1} d_{n-1} w = d_{n-1} \phi = v$ car ϕ vaut v sur sa frontière.
3. $d_n d_n w = d_n d_{n+1} w = d_n \psi = v$

Dès lors, $d_n w$ vaut v sur sa frontière et donc représente un élément de $\pi_n K$. De plus, on a :

Lemme A.3.1. *Si w est construit comme précédemment, à partir de ϕ et ψ , alors $[d_n w]$ est indépendant des représentant de $[\phi]$ et $[\psi]$. En d'autres termes, si $A : K_n \times K_n \rightarrow K_n$ est la procédure décrite plus haut (qui permet d'obtenir $d_n w$ à partir de ϕ et de ψ), et si a et b sont homotopes, de même que c et d , alors $A(a, c)$ et $A(b, d)$ le sont.*

On a donc défini une loi $\pi_n(K, v) \times \pi_n(K, v) \rightarrow \pi_n(K, v)$ pour $n \geq 1$. Une étude plus approfondie nous amène au théorème suivant :

Théorème A.3.2 (GJ, I,7.2). *La loi que l'on vient de définir sur $\pi_n K$, où $n \geq 1$, est une loi de groupe, et même de groupe abélien pour $n \geq 2$.*

A.4 Représentation géométrique

Pour $n \geq 0$, soit le n -simplexe standard topologique $|\Delta^n| = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1; \forall i, x_i \geq 0\}$ muni de la topologie induite par \mathbb{R}^{n+1} . On dispose d'applications $\sigma_i : |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^{n-1}|$ pour $0 \leq i \leq n-1$ et $\delta_i : |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^{n+1}|$ pour $0 \leq i \leq n+1$ qui sont définies par :

$$\sigma_i(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_i + x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (\text{A.5})$$

$$\delta_i(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n) \quad (\text{A.6})$$

Remarque A.4.1. La structure et les relations entre ces espaces topologiques sont en fait induits par un foncteur entre la catégorie simpliciale et la catégorie **Top**. Ce foncteur associe à $[n]$ l'espace $|\Delta^n|$, δ_i à d_i et σ_i à s_i . C'est d'ailleurs de ces espaces topologiques que viennent les termes faces et dégénérescences.

En s'inspirant de l'homologie singulière, à tout espace topologique X , on peut associer un ensemble simplicial noté $Sing(X)$, tel que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Sing(X)_n$ est l'ensemble des fonctions continues de $|\Delta^n|$ vers X .
2. la $i^{\text{ème}}$ face $d_i : Sing(X)_n \rightarrow Sing(X)_{n-1}$ envoie la fonction continue f sur $f \circ \delta_i$.
3. la $i^{\text{ème}}$ dégénérescence $s_i : Sing(X)_n \rightarrow Sing(X)_{n+1}$ envoie la fonction continue f sur $f \circ \sigma_i$.

Par ailleurs, si $h : X \rightarrow Y$ est une fonction continue entre espaces topologiques, elle induit un morphisme entre ensembles simpliciaux $Sing(h)$ par $Sing(h)_n : f \in Sing(X)_n \mapsto h \circ f \in Sing(Y)_n$. On a donc bien défini le foncteur $Sing : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$.

A l'inverse, par la remarque précédente, on a un foncteur $|\cdot|$ de la sous-catégorie pleine de \mathbf{sSet} des simplexes standards vers **Top** qui associe $|\Delta^n|$ à Δ^n , δ_i à la $i^{\text{ème}}$ coface $\Delta^n \rightarrow \Delta^{n+1}$ et σ_i à la $i^{\text{ème}}$ codégénérescence $\Delta^n \rightarrow \Delta^{n-1}$. Parallèlement, si X est un ensemble simplicial considérons $\Delta \downarrow X$, la sous-catégorie pleine de $\mathbf{sSet}/_X$ (ensembles simpliciaux sur X) des simplexes standards ($\Delta^n \rightarrow X$). On a alors un foncteur $F_X : \Delta \downarrow X \rightarrow \mathbf{Top}$ qui associe $|\Delta^n|$ à toute flèche de la forme $\Delta^n \rightarrow X$. On définit alors la représentation géométrique de X comme :

$$|X| = \text{colim} F_X. \quad (\text{A.7})$$

De plus, si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme d'ensembles simpliciaux, alors il induit un foncteur $f_* : \Delta \downarrow X \rightarrow \Delta \downarrow Y$ (composition avec f) tel que $F_X = F_Y \circ f_*$. Dès lors, f induit une application de $\text{colim} F_X = \text{colim} F_Y \circ f_*$ vers $\text{colim} F_Y$, c'est-à-dire une fonction continue $|X| \rightarrow |Y|$. La construction $|\cdot|$ est donc fonctorielle.

Proposition A.4.1 (GJ, I.2.2). *Le foncteur $|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ est adjoint à gauche du foncteur $Sing : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$.*

Enfin, si X est un ensemble simplicial, on peut définir les groupes d'homotopie et l'ensemble des classes connexes par arc de X comme ceux de $|X|$. Cette définition coïncide bien avec celle que nous avons introduite auparavant pour les complexes de Kan.

Annexe B

Catégories monoïdales, monoïdes et catégories enrichies

B.1 Catégorie monoïdale

Intuitivement, une catégorie monoïdale est une catégorie munie d'une loi de produit.

Définition B.1.1. Une catégorie monoïdale est la donnée d'une catégorie \mathcal{C} , d'un bifoncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, d'un objet particulier I de \mathcal{C} et, pour tous objets A , B et C , d'isomorphismes :

$$\begin{aligned}\alpha_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) &\simeq (A \otimes B) \otimes C \\ \lambda_A : I \otimes A &\simeq A \\ \rho_A : A \otimes I &\simeq A\end{aligned}$$

tels que $\rho_I = \lambda_I$ et tels que les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \xrightarrow{\alpha} & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\ \downarrow id \otimes \alpha & & & \uparrow \alpha \otimes id \\ A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} A \otimes (I \otimes B) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes I) \otimes C \\ & \searrow id \otimes \lambda & \swarrow \rho \otimes id \\ & A \otimes C & \end{array}$$

sont commutatifs.

On peut ajouter une condition de symétrie, ce qui correspond intuitivement à une loi commutative.

Définition B.1.2. Une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ est dite symétrique si elle est munie d'isomorphismes pour tous objets A et B :

$$\gamma_{A,B} : A \otimes B \simeq B \otimes A$$

tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\gamma} & C \otimes (A \otimes B) \\ \downarrow id_C \otimes \gamma & & & \downarrow \alpha \\ A \otimes (C \otimes B) & \xrightarrow{\alpha} & (A \otimes C) \otimes B \xrightarrow{\gamma \otimes id_B} & (C \otimes A) \otimes B \end{array}$$

est commutatif et tels que $\gamma_{A,B} \circ \gamma_{B,A} = id_{B \otimes A}$ et $\rho_B = \lambda_B \circ \gamma_{B,I}$.

Exemple B.1.1. Les produits usuels sur \mathbf{Set} , \mathbf{Top} , \mathbf{Ab} et \mathbf{sSet} définissent des structures monoïdales symétriques sur ces catégories.

B.2 Monoïdes et monoïdes commutatifs

Ces structures monoïdales permettent de généraliser la notion usuelle de monoïde à d'autres catégories.

Définition B.2.1. Si (C, \otimes, I) est une catégorie monoïdale, alors un monoïde de C est un objet M muni de morphismes :

$$\begin{aligned}\mu_M &: M \otimes M \rightarrow M \\ \eta &: I \rightarrow M\end{aligned}$$

appelés respectivement multiplication et unité et tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes (M \otimes M) & \xrightarrow{\alpha} & (M \otimes M) \otimes M & \xrightarrow{\mu \otimes id} & M \otimes M \\ \downarrow id \otimes \mu & & & & \downarrow \mu \\ M \otimes M & \xrightarrow{\mu} & & & M \end{array}$$

et le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} I \otimes M & \xrightarrow{\eta \otimes id} & M \otimes M & \xleftarrow{id \otimes \eta} & M \otimes I \\ & \searrow \lambda & \downarrow \mu & \swarrow \rho & \\ & & M & & \end{array}$$

sont commutatifs. Si C est une catégorie abélienne, on parle aussi d'objet anneau ou objet algèbre. En outre, si (M, μ, η) et (M', μ', η') sont deux monoïdes de C , un morphisme $f : M \rightarrow M'$ est un morphisme de monoïdes si $f \circ \mu = \mu' \circ (f \otimes f)$ et $f \circ \eta = \eta'$. On a alors défini la catégorie des monoïdes de C .

Définition B.2.2. Si (C, \otimes, I) est une catégorie monoïdale symétrique, alors un monoïde symétrique de C est un monoïde M tel que $\mu_M \circ \gamma_{M,M} = \mu_M$. Si C est une catégorie abélienne, on parle aussi d'objet anneau commutatif ou d'objet algèbre commutative. La catégorie des monoïdes commutatifs de C est alors une sous-catégorie pleine de la catégorie des monoïdes.

Exemple B.2.1. Si on munit les catégories de l'exemple précédent de la structure monoïdale (symétrique) que l'on avait introduite, alors :

1. les monoïdes (resp. monoïdes symétriques) de Set sont les monoïdes (resp. monoïdes commutatifs).
2. les monoïdes (resp. monoïdes symétriques) de Ab sont les anneaux unitaires associatifs (resp. anneaux unitaires commutatifs).

B.3 Catégorie enrichie sur une catégorie monoïdale

Définition B.3.1. Une catégorie C enrichie sur une catégorie monoïdale (E, \otimes, I) est la donnée :

1. d'une classe d'objets $\text{Obj}(C)$.
2. pour toute paire d'objets (X, Y) de C , d'un objet de E noté $\text{Map}_C(X, Y)$.
3. pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets de C , d'un morphisme dans E :

$$\nu_{X,Y,Z} : \text{Map}_C(X, Y) \otimes \text{Map}_C(Y, Z) \rightarrow \text{Map}_C(X, Z)$$

appelé loi de composition.

4. pour tout objet X de C , d'un morphisme dans E :

$$\iota_X : I \rightarrow \text{Map}_C(X, X).$$

De plus :

1. pour tout quadruplet d'objets (X, Y, Z, U) d'objets de \mathbf{C} , le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Map}_{\mathbf{C}}(X, Y) \otimes (\text{Map}_{\mathbf{C}}(Y, Z) \otimes \text{Map}_{\mathbf{C}}(Z, U)) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \nu_{Y, Z, U}} & \text{Map}_{\mathbf{C}}(X, Y) \otimes \text{Map}_{\mathbf{C}}(Y, U) \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \nu_{X, Y, U} \\
 (\text{Map}_{\mathbf{C}}(X, Y) \otimes \text{Map}_{\mathbf{C}}(Y, Z)) \otimes \text{Map}_{\mathbf{C}}(Z, U) & & \\
 \downarrow \nu_{X, Y, Z} \otimes \text{id} & & \\
 \text{Map}_{\mathbf{C}}(X, Z) \otimes \text{Map}_{\mathbf{C}}(Z, U) & \xrightarrow{\nu_{X, Z, U}} & \text{Map}_{\mathbf{C}}(X, U)
 \end{array}$$

est commutatif.

2. pour toute paire d'objets (X, Y) de \mathbf{C} , le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Map}_{\mathbf{C}}(X, X) \otimes \text{Map}_{\mathbf{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\nu_{X, X, Y}} & \text{Map}_{\mathbf{C}}(X, Y) & \xleftarrow{\nu_{X, Y, Y}} & \text{Map}_{\mathbf{C}}(X, Y) \otimes \text{Map}_{\mathbf{C}}(Y, Y) \\
 \uparrow \iota_X \otimes \text{id} & \nearrow \lambda & & \nwarrow \rho & \uparrow \text{id} \otimes \iota_Y \\
 I \otimes \text{Map}_{\mathbf{C}}(X, Y) & & & & \text{Map}_{\mathbf{C}}(X, Y) \otimes I
 \end{array}$$

est commutatif.

Bibliographie

- [DAG II] Lurie, Jacob *Derived Algebraic Geometry II : Noncommutative Algebra*, <http://arxiv.org/pdf/math/0702299v5.pdf>
- [DAG X] Lurie, Jacob, *Derived Algebraic Geometry X : Formal Moduli Problems*, www.math.harvard.edu/~lurie/papers/DAG-X.pdf.
- [DK1] Dwyer, W. G.; Kan, D. M. *Simplicial Localizations of Categories.*, Journal of Pure and Applied Algebra 17 (1980) 267-284
- [DK2] Dwyer, W. G.; Kan, D. M. *Calculating Simplicial Localizations.*, Journal of Pure and Applied Algebra 18 (1980) 17-35
- [DK3] Dwyer, W. G.; Kan, D. M. *Function Complexes in Homotopical Algebra.*, Topology Vol 19, pp. 427-440
- [DS] Dwyer, W. G.; Spalinski, J. *Homotopy theories and model categories.* Handbook of algebraic topology, 73–126, North-Holland, Amsterdam, 1995. (Reviewer : Yves Félix) 55Uxx (18E35)
- [EQ] Schwede, Stefan(D-MUNS-GFM); Shipley, Brooke(1-PURD) *Equivalences of monoidal model categories.* (English summary) Algebr. Geom. Topol. 3 (2003), 287–334. 55U40 (18D10 18G30 18G35 55P43 55P62 55U35)
- [GER] Gerstenhaber, Murray, *On the deformation of rings and algebras.* Ann. of Math. (2) 79 1964 59–103. (Reviewer : D. Zelinsky) 16.90 (13.93)
- [GJ] Goerss, Paul G.; Jardine, John F. *Simplicial homotopy theory.* Reprint of the 1999 edition [MR1711612]. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. xvi+510 pp. ISBN : 978-3-0346-0188-7 55U10 (18G55)
- [HA] Lurie, Jacob, *Higher Algebra.*, <http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HigherAlgebra.pdf>
- [HIN] V. Hinich, Vladimir(IL-HAIF), *DG coalgebras as formal stacks.*, (English summary) J. Pure Appl. Algebra 162 (2001), no. 2-3, 209–250. 14B12 (16W30 18G55 55P62).
- [HIR] Hirschhorn, Philip S. *Model categories and their localizations.*, Mathematical Surveys and Monographs, 99. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xvi+457 pp. ISBN : 0-8218-3279-4 (Reviewer : David A. Blanc) 18G55 (55P60 55U35).
- [HTT] Lurie, Jacob *Higher topos theory.*, Annals of Mathematics Studies, 170. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. xviii+925 pp. ISBN : 978-0-691-14049-0; 0-691-14049-9 18-02 (18B25 18E35 18G30 18G55 55U40)
- [SCA] Schapira, Pierre *Categories and Homological Algebra*, <http://www.math.jussieu.fr/~schapira/lectnotes/HomAl.pdf>
- [SYS] Schwede, Stefan *Symmetric Spectra*, <http://www.math.uni-bonn.de/people/schwede/SymSpec-v3.pdf>
- [TV] Toën, Bertrand; Vezzosi, Gabriele *From homotopical algebra to homotopical algebraic geometry*, Lectures at the DFG-Schwerpunkt Workshop, Essen, October, 25-26 2002 (organized by H. Esnault, S. Müller-Stach, E. Viehweg). <http://www.dma.unifi.it/~vezzosi/papers/essen-web.pdf>